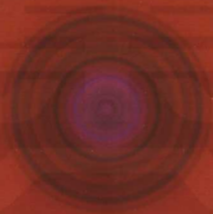
逻辑与智能丛书

涂德辉 主编

公理集合引论

西南师范大学出版社

公理集合论





ISBN 978-7-5621-3764-1
9 787562 137641 >
定价：18.00元

逻辑与智能丛书

公理集合引论

主编　涂德辉

西南师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

公理集合引论/涂德辉主编. 一重庆:西南师范大学出版社,2007.1

ISBN 978-7-5621-3764-1

Ⅰ.公... Ⅱ.涂... Ⅲ.①集论②公理(数学) Ⅳ.0144

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 006981 号

逻辑与智能丛书

公理集合引论

主编 涂德辉

责任编辑:朱乃明

封面设计:王 煤

出版发行:西南师范大学出版社

地址:重庆市北碚区

网址:http://www.xscbs.com

印 刷 者:西南政法大学印刷厂

开 本:850mm×1168mm 1/32

印 张:9.5

字 数:238 千字

版 次:2007 年 2 月 第 1 版

印 次:2007 年 2 月 第 1 次印刷

书 号:ISBN 978-7-5621-3764-1

定 价:18.00 元

丛书编委会

《逻辑与智能丛书》序

何向东

逻辑学是研究思维形式的结构及其规律以及认识事物的简单逻辑方法的科学。逻辑学作为思维科学，与人的智能的培养与提高联系极其密切。逻辑学具有全人类性、基础性、工具性与规范性，被称为人类成员都得学习与掌握的“思维的语法”。学习逻辑学，有助于培养和提高认知自学能力，有助于培养与提高理论素养，有助于培养和提高科学研究能力，有助于培养和提高思维素质。逻辑学在智力开发、思维素质的培养与提高方面，具有其他学科与课程不可替代的重要作用。当今世界，逻辑学已渗透到许多学科领域，诸如哲学、心理学、计算机科学、语言学、物理学、法学、伦理学等。许多国家，尤其是欧美发达国家对逻辑的研究和普及倾注了巨大的人力、财力、物力。20 世纪 80 年代，联合国教科文组织正式将逻辑学列为与数、理、化、天、地、生同等重要的基础学科。初见端倪的知识经济呼唤逻辑学，发展与繁荣哲学社会科学，全面推进素质教育，都迫切需要逻辑学的发展与繁荣。在提高中国公民的思维素质、思维能力和科学文化水平的过程中，逻辑学大有可为。

我校逻辑与智能研究中心成立于 2005 年 4 月，在全国逻辑学界大力支持下，发展很快，已经于 2006 年 12 月批准为重庆市重点文科研究基地。为了进一步发挥中心的作用，充分调动中心专、兼

职专家学者的科研积极性，我们决定编辑出版《逻辑与智能研究丛书》。该丛书包括学术专著、译著、教材。如同逻辑与智能研究中心聘请了若干名校外的专家学者做兼职研究人员，是一个开放性的文科研究基地一样，这套丛书也具有开放性，它面向全国学术界，吸纳逻辑学、心理学、语言哲学、认知科学、计算机科学、人工智能等学科的书稿，特别欢迎在新兴学科、交叉学科、边缘学科方面，在逻辑与智能研究方面的创新性成果。

我们坚信，在大家的共同努力下，丛书的质量和水平将不断提高，从而为逻辑学的学科建设，为全面实施素质教育，实施全面的素质教育，为发展与繁荣哲学社会科学作出应有的贡献！

二00七年一月

目录

第一章　绪论……………………………………………… (1)

第二章　集合 ……………………………………………… (12)

第一节　集合的概述 ……………………………………… (12)

第二节　集合论的公式与集合的条件 …………………… (18)

第三章　集合的基本运算 ………………………………… (26)

第一节　子集 ……………………………………………… (26)

第二节　偶集 ……………………………………………… (32)

第三节　集合的并运算…………………………………… (36)

第四节　集合的交运算…………………………………… (43)

第五节　集合的差运算…………………………………… (48)

第六节　集合的幂运算…………………………………… (51)

第四章　关系集与函数集 …………………… (57)
第一节　序偶 …………………………………… (57)
第二节　笛卡尔积 ……………………………… (61)
第三节　关系集 ………………………………… (65)
第四节　等价关系集 …………………………… (70)
第五节　关系集的逆集与复合集 ……………… (77)
第六节　函数集 ………………………………… (82)
第七节　象和原象 ……………………………… (91)
第八节　反函数集和复合函数集 ……………… (101)
第九节　族 ……………………………………… (109)

第五章　集合的数学模型——自然数集 …… (121)
第一节　引言 …………………………………… (121)
第二节　自然数集 ……………………………… (126)
第三节　皮亚诺公理体系 ……………………… (136)
第四节　自然数的顺序 ………………………… (138)
第五节　最小数原理 …………………………… (144)
第六节　递推原理 ……………………………… (147)
第七节　自然数的和、积、幂 ………………… (156)
第八节　第二归纳原理 ………………………… (167)

第六章　集合的等势与受制……………………（170）
第一节　集合的等势 ……………………………（170）
第二节　有限集 …………………………………（180）
第三节　集合的受制 ……………………………（185）
第四节　选择公理 ………………………………（192）
第五节　可数集与一般无穷集…………………（198）

第七章　序集…………………………………（204）
第一节　序集……………………………………（204）
第二节　良序集 …………………………………（209）
第三节　超限归纳原理 …………………………（216）
第四节　序集的相似和良序集的比较 …………（219）
第五节　良序化原理 ……………………………（224）
第六节　Zorn 引理 ……………………………（231）

第八章　基数与序数…………………………（242）
第一节　序数……………………………………（244）
第二节　序数之间的顺序 ………………………（249）
第三节　替换公理 ………………………………（255）
第四节　计数原理 ………………………………（259）
第五节　选择公理的另一个等价命题 …………（262）

第六节　序数的和与积 …………………………………………… (264)
第七节　基数 ……………………………………………………… (271)
第八节　无序集的基数 …………………………………………… (274)
第九节　基数的和、积、幂 ……………………………………… (279)

参考书目 ……………………………………………………………… (294)

第一章　绪　论

集合论是一门历史还不算太长的学科，本章通过对集合论的产生和发展的介绍，使读者对集合论的科学背景有一个基本的了解.

一、集合论产生的背景

集合论简称“集论”. 集合论以集合为对象，用朴素直观或者公理化的方法，对集合的性质、集合之间的关系如相等、属于、包容等进行研究. 其中，以公理化方法研究的集合论，被称为“公理集合论”，而用朴素直观的方法研究的集合论，则称为“朴素集合论”.

集合论是近代以来的数学家试图为微积分学奠定坚实的基础而努力的产物. 在牛顿（Isaac Newton，1642～1727）和莱布尼兹（Gottfrid Wilhelm Von Leibniz，1646～1716）等人之前，人们对瞬息万变的客观现象，都只能讨论、计算它们变化的平均值，而无法得到事物在某一瞬间变化的瞬间值. 例如事物的运动速度，虽然在客观世界中，大量的物体速度在某一时间段中都不是等速的，但人们无法得到物体在该时间段内每一时刻的瞬间速度，而只能依靠距离除以时间来获得在该时间段中的平均速度. 这显然是不利于科学的发展的. 因为人们对运动物体在该时间段内每一时刻的瞬间速度的大小、运动速度变化的规律等都无法得以了解，当然也无法去把握它们. 平均速度虽然说也是物体运动的一个重要指标，但

不是决定物体运动的最重要、最根本的指标.平均速度不能如瞬间速度那样,为人们提供物体此后运动的方向、速度的快慢趋势等.为了解决如物体瞬间速度的这些类似问题在量方面的计算,牛顿、莱布尼兹等人创造发明了微积分的计算方法.以对物体从静止状态开始自由下落,其下落过程中任一时刻的瞬间速度的计算为例,假定该物体从静止状态下落 t 秒后,下落的总距离为 s,那么,

$$s=\frac{1}{2}gt^2.$$

其中,g 为重力加速度,是一常数.我们知道,物体从下落的那一瞬间开始,其下落的速度会越来越快,否则,人们从高处往下跳或者从万米高空返回地面也就不会有那么多的麻烦和困难了.那么,当物体下落到时刻 t 时,它究竟以什么样的方式改变着自己的速度?或者,它在时刻 t 时,其获得的瞬间速度究竟是多大呢?

我们可以这样来考虑问题:设在时刻 t 后,物体再继续下落 h 秒,在 h 秒这段时间中的位移距离为 l,而在 $t+h$ 这段总时间中物体的位移距离设为 S,那么,一方面有

$$S=\frac{1}{2}g(t+h)^2;$$

而另一方面,有

$$\begin{aligned}l&=S-s\\&=\frac{1}{2}g(t+h)^2-\frac{1}{2}gt^2\\&=gth+\frac{1}{2}gh^2;\end{aligned}$$

现在,假设物体在时间段 h 中的平均速度为 $\bar{v}$,那么,

$$\begin{aligned}\bar{v}&=l\div h\\&=gt+\frac{1}{2}gh.\end{aligned}$$

从理论上说,上面计算所导致的结论是非常明显的:即 h 的值

越小，则越是接近物体在 t 时刻的瞬间速度. 但在该结论中所包含的逻辑矛盾也是同样的明显的：即无论 h 是如何地小，只要 h 不等于零，那么，$\bar{v}$ 就不可能是物体在 t 时刻的瞬间速度. 反之，如果 h 等于零，那么

$$\bar{v} = l \div h$$

就是一个没有意义的计算式，当然也就无法依靠它去计算物体下落到时刻 t 时的瞬间速度了.

为了摆脱这一困境，牛顿、莱布尼兹等人提出了许许多多的解决问题的方法，但就当时的科学观和方法论来说，无论如何地解释，都无法摆脱既要 h 不等于零又要 h 等于零的矛盾. 这种看来无法消除的矛盾让当时对辩证法、对新的科学、对新科学的认识方法都怀有敌意的唯心主义者们特别地高兴，其代表人物即英国的神学大主教贝克莱(George Berkeley, 1685 ～ 1753) 就说过，勉强使 h 为既不等于零又等于零的无穷小，这就是逻辑矛盾，这就是荒谬，因此，所谓的微积分完全没有合理的内容，只能是伪科学.

然而，唯心主义者们的攻击并不能阻挡科学的发展. 从科学的发展史来看，每当一门科学露出破绽，看起来不是那么完满的时候，最大的可能性之一也许就是这门科学将要飞跃发展的时候. 微积分学就是这样的科学. 莱布尼兹(Gottfried Wilhelm Von Leibniz, 1646 ～ 1716)、拉格朗日(Lagrange, 1736 ～ 1813) 和柯西(Cauchy, 1789 ～ 1857) 等人后来建立起来的极限理论，合理地解决了如 h 这样的无穷小在微积分学中的矛盾性问题，使该学科得到长足的发展.

在极限理论中，有一条可以说是至关重要的极限性质：有界单调的数列必定存在极限. 一般来说，人们通常把它看成是极限所有其他性质的基础. 那么，这条极限性质本身的真实性是如何地被证明的呢？长期以来，人们都误认为该性质的真实性是可以依赖于某些几何的性质的. 然而当人们认真地在几何学中去查找它的依据时，人们似乎才第一次惊奇地发现，在几何学的公理体系中，根本

就不讨论实数的连续和极限问题，尽管极限理论的这一基本性质若归于几何学，其连续和极限都可以在几何中得到非常明显的直观. 几何学和微积分学是两个不同的学科系统，因此在几何系统中的直观性并不能代表在微积分理论系统中的逻辑必然性. 至少对当时的学者们来说，明确地知道一个理论系统中某个命题的真实性，是不能依赖于另一个理论系统中某些命题的真实性去证明的.

当然，随后由戴德金(R. Dedekind，1831 ～ 1916) 和康托尔(Cantor，1845 ～ 1918) 等人通过重新给"实数"定义，最终在微积分理论中不依赖任何几何直观，纯逻辑地证明了极限的这一基本性质，使微积分学建立在牢固的极限理论的基础之上. 并以此为契机，人们开始去追问数学的各个分支最后乃至于数学的基础，希望能证明它们都是不至于包含有逻辑矛盾的系统. 在这个过程中，人们使用让理论"还原"的方法，把数学的主要分支最终都"还原"为当时的集合理论. 人们预言，只要当时为人们肯定的集合理论是一个不矛盾的理论体系，那么，数学的基础就是牢固的，否则数学大厦的基础就会动摇，整个数学大厦也就会因为失去支撑而倾斜.

1902 年，英国学者罗素(Bertrand Arthur William Russell，1872 ～ 1970) 宣告，在当时的集合理论中发现了一个悖论. 罗素所发现的这个悖论虽然简单，却杀伤力无穷. 因为，他完全以当时集合理论所允许的条件，作为悖论的构造前提，悖论的形式完全是纯集合的，但它就以这样极为简单的形式表明，在当时已经广为流行、对数学从而对整个科学具有特别重要的意义的集合理论本身是矛盾的. 这无异于是一枚投向科学界的重磅炸弹，使得整个科学界为之一震，导致了数学史上最为重大的第三次数学危机. 也正是这次危机，促进了集合论的迅速问世.

二、集合论的产生和发展

集合论产生之前，集合理论就已经在当时的科学界广为流行，

特别在数学界引起极大的反响.1851 年，在捷克人波尔察诺(Bernald Bolzano，1781 ～ 1848）的遗著《关于无穷的悖论》中，1888 年，在戴得金的《什么是数》中，都对集合的问题有较为深刻的论述，为集合理论的产生和发展作出了一定的贡献. 但是，他们在集合理论中所考虑的对象毕竟都只局限在数或者函数的范围内. 为集合理论作出了特殊贡献的是康托尔. 康托尔在探讨三角级数展开式的唯一性问题的过程中，引起了对集合结构的兴趣. 不久，他敏锐地发现，他的新的研究工作具有完全独立于三角级数甚至于函数本身的重要性，并且在 1871 年到 1897 年之间，他发表了一系列论文，对集合理论进行广泛深入地论述. 在这些论述中，他把集合的元素推广应用到任意的对象上，而不再仅仅限于数和函数；他阐明了"无穷"的本质，通过区分"实无穷"和"潜无穷"，构造出无限多层次的"实无穷"，使每一个"实无穷"都成为一个实体，从而使之成为数学、逻辑学、哲学等研究的对象；他提出了一批关于集合理论的重要概念，如点集拓扑、次序等；创造了对角线证明方法；在集合理论的基础上为数的概念提供了一个合理的内核等. 康托尔在集合理论方面的创造性工作，使集合的理念为人们所认可，并因此渗入到科学理论的各个系统，特别广泛地渗入到数学的各个分支，使数学界的面貌因此焕然一新. 到今天，以集合理论为基础所发展起来的集合论，成为数学几乎所有分支的基础并由此深入持久地影响着其他许多的重要学科. 由此看来，我们把康托尔称为集合理论的创始人这应该是当之无愧的.

但是，由于康托尔始终是以朴素直观的方法来整理集合方面的经验知识，那些被理论化的经验知识之间的关系始终是不确定的、处于松散的联系状态之中，因此，他所建立的集合理论一开始就有两个方面的缺陷：一是关于集合的定义的缺陷，一是关于构造合理集合的规则的缺陷. 就第一方面来说，康托尔始终认为，所谓集合，就是"我们直觉中或者理智中确定的、互不相同的事物的一

个汇集，它被设想为一个整体(单体).”在康托尔这个被后人称为描述性的定义中，“汇集”、“整体”、“单体”实际上都是集合的俗称，因此整个描述有循环定义之嫌；同时，在他的定义中带有极为浓厚的主观主义色彩，这表现在对事物的确定性等的判定，依赖的不是符合形式理论的纯客观性的标准，而是主观的意识. 另一方面的缺陷对康托尔集合理论来说是非常致命的，在康托尔的集合理论中，没有明确指出，对于已知的集合，我们究竟该可以做、如何做哪些事情才是合法的或者合乎逻辑的?仅对集合的构造来说，这个问题就是：我们可以怎么样去构造集合，所构造出来的集合才是人们能够接受的?才是合法的?才是不至于引起逻辑矛盾的?由于康托尔集合理论在上述两方面的缺陷，使得他的集合理论不能把逻辑矛盾即集合悖论排除在集合理论之外.

正因为如此，康托尔集合理论招致了以罗素悖论为首的集合悖论的重大冲击. 1902 年，罗素宣布在康托尔集合理论的基础上发现了一个集合悖论，这就表明，康托尔集合理论包含有逻辑上不可避免的逻辑矛盾.

罗素所针对的，就是康托尔集合理论中集合元素的确定性，这个“确定性”的保证应当是什么?罗素认为，如果“确定性”没有严格的条件作为保证，那么在集合的构造过程中就会引起矛盾. 如，我们给定集合 A，而能成为集合 A 的元素的集合 x 的条件是“$x \notin x$”，即

$$\forall x(x \in A \leftrightarrow x \notin x),$$

这个条件在人们的经验世界中看起来是如此的明确，由此方式所构造的集合对人们来说应当是确定无疑的，它在人们的经验世界中是非常合理的. 但现在罗素提出的问题在于：既然对 x 的要求仅仅需要的是集合，那么当然也应当考虑集合 A 的归属，即集合 A 是否属于我们所构造的这个集合?当时的集合理论和逻辑理论在这里联合起来同人们开了一个玩笑，因为，如果集合 A 属于集合 A，

则由 A 集元素应满足的条件来看,A 不能属于 A. 即

$$A \in A \Rightarrow A \notin A,$$

但如果集合 A 不能属于集合 A,同样由 A 集元素应满足的条件来看,A 属于 A,即

$$A \notin A \Rightarrow A \in A,$$

这显然是一个无法消解的矛盾. 它否定了集合理论中都存在的集合元素的确定性这一性质. 当然,这并不是说这一性质不重要、不必要. 它实际上表明,即使满足集合元素条件的明确性,这些元素汇集在一起也不一定能构造出合理的集合来. 如果我们不加分析地接受这样的集合,最终就会在集合理论中引发混乱、引发逻辑矛盾,使整个集合理论毁于一旦.

尽管罗素悖论对数学界、逻辑界乃至整个科学界的冲击是如此的巨大,但科学家伟大的历史责任感和探求真理的坚忍不拔的精神在此刻表现出更为巨大的力量. 为了克服集合理论在初创阶段中的种种不足,为了完善集合理论本身,1908 年,德国人策梅罗(Ernst Zermelo,1871 ~ 1953) 首先为集合理论设立了一套较为完整的公理,其目的就是要明确规定对我们所讨论的对象集合来说,我们可以、应该和能够做哪些事情才是正确的,才不至于在集合理论中导致悖论的出现. 策梅罗的工作标志着集合论的问世,他的这些公理后来经过弗兰克尔(Abraham Fraenkel,1891 年 ~ 1965 年) 和斯柯林(Thoralf Skolem,1887 ~ 1963) 的严格解释和少许改进,成为现在的两个最为著名的公理集合论系统中的一个,即 ZF 公理体系. 稍后,由纽曼(Von Neumann,1801 ~ 1890)、伯雷(P. Bernays,1888 ~ 1977) 和哥德尔(Kurt Gödel,1906 ~ 1978) 等人建立了 GB 公理系统. 在这些系统中,集合悖论都相应的被排除了. 而在集合论公理化体系的不断改进过程中,随着选择公理和连续统假设的研究和应用,大大地推进了集合论的发展,使之最终成为 20 世纪最为活跃也最为重要的学科之一. 至于康托尔集合理

论中的另一缺陷即集合定义方面的问题，人们也采取了任何一门学科都允许的方法，即对某些概念不加定义而作为原始概念的处理方法，以避免来自如逻辑、哲学学科方面的非难.

三、ZF 公理系统的几条主要公理

在现代，有关集合论的理论中，有各种不同的集合论公理体系. 但其中最为基本也最具有代表性的，仍然是 1908 年由策梅罗建立、后来经弗兰克尔和斯柯林改进的 ZF 系统. 姑且不管该系统建立的方法和其他的相关内容，从整体的框架上，我们可以先了解一下它的 10 条主要的公理.

1. 外延公理

一个集合总是由它的元素所决定的. 用形式语言可记为：

$$\forall x \forall y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y).$$

其中，x,y,z 都是表示集合的符号；$\forall$，$\in$，$\leftrightarrow$，$\rightarrow$，$=$ 分别表示"任一"、"属于"、"当且仅当"、"如果 …，那么 …" 和"等于".

2. 空集存在公理

存在一个没有任何元素的集合. 用形式语言可记为：

$$\exists x \forall y(y \notin x).$$

其中，$\exists$，$\notin$ 分别表示"存在"、"不属于". 习惯上，空集用 $\varnothing$ 来表示.

3. 配对公理（无序对集合存在公理）

对任意给定的集合 x 和 y，都存在集合 z，使得集合 z 的元素恰好是 x 与 y. 用形式语言可记为：

$$\forall x \forall y \exists z \forall u(u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y).$$

其中，$\vee$ 表示"… 或者 …". 配对公理实际上包含了单元集和无序二元集即偶集的构造原则. 习惯上，人们把这样的集合 z 记为 $\{x, y\}$，并且当 $x = y$ 时，记为 $\{x\}$，并称后者为 x 的单元集.

4. 并集公理

对任意的集合 x，都存在集合 y，使得集合 y 的元素恰好是 x 的元素的元素. 用形式语言可记为：

$$\forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \exists u(z \in u \wedge u \in x)).$$

其中，$\wedge$ 表示“… 并且 …”，以后，我们常用 $\bigcup x$ 来表示集合 x 的元素的并集.

5. 幂集公理

对任意的集合 x，都存在集合 y，使得集合 y 的元素恰好是 x 的子集合. 用形式语言可记为：

$$\forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow z \subset x).$$

其中，$\subset$ 表示“… 包容于 …”.

6. 无穷公理

存在集合 ω，它的元素恰好是所有的自然数. 用形式语言可记为：

$$\exists \omega(\varnothing \in \omega \wedge \forall x(x \in \omega \rightarrow x \cup \{x\} \in \omega)$$

或者

$$\exists \omega(0 \in \omega \wedge \forall n(n \in \omega \rightarrow n^{+} \in \omega).$$

其中，$\cup$，n^{+} 分别表示“并”和自然数 n 的后继数.

7. 分离或子集公理模式

对于任意给定的公式 $A(z)$（即满足条件的集合 z），和任意的集合 x 来说，都存在集合 y，使得对任意的集合 z，z 属于 y，当且仅当 z 属于 x 并且 z 满足条件 A. 用形式语言可记为：

$$\forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge A(z)).$$

8. 替换公理模式

对于任意给定的公式 $A(x,y)$，如果对任意的集合 x，都唯一存在满足该公式的集合 y，那么，对任意的集合 t，都存在集合 s 使得对每一集合 u 都有，如果 u 属于 s，当且仅当有集合 z，使得 z 属于 t 并且 z，u 满足公式 A. 用形式语言可记为：

$$\forall x \exists ! y A(x,y) \rightarrow \forall t \exists s \forall u(u \in s \leftrightarrow \exists z(z \in t \wedge A(z,u))).$$

其中，$\forall x \exists ! y A(x,y)$ 表示"唯一存在满足条件 $A(x,y)$ 的集合 y".

9. 正则(或基础)公理

任意的非空集合都至少有一个元素，使得它与该集合之交为一空集. 用形式语言可记为：

$$\forall x(x \neq \varnothing \rightarrow \exists y(y \in x \wedge x \cap y = \varnothing)).$$

其中的 $\cap$ 表示"交".

10. 选择公理

如果对任意的集合 x 和 y，都有若 y 属于 x，则 y 非空，并且对任意的集合 y 和 z，都有 y 属于 x 并且 z 属于 x 并且 y 不等于 z，则 y 与 z 的交集为空集，那么，必有集合 c，使得对任意的集合 y 都有，如果 y 属于 x，那么存在唯一的集合 t，使得 t 属于 y 并且 t 属于 c，并且对属于 c 的任意集合 t，都唯一存在属于 x 的 z，使得 t 也属于 z. 选择公理用形式语言表示如下：

$$\forall x \forall y(y \in x \rightarrow y \neq \varnothing) \wedge \forall y \forall z(y \in x \wedge z \in x \wedge y \neq z \rightarrow y \cap z = \varnothing)$$
$$\rightarrow \exists c \forall y(y \in x \rightarrow \exists ! t(t \in y \wedge t \in c) \wedge \forall t \in c \exists ! z \in x(t \in z)).$$

选择公理无论从内容还是从形式上说，都是一条较难理解的公理. 保留它在系统中的地位，是因为它在系统理论的许多复杂问题的证明上有较大的方便性和灵活性.

在上述 10 条公理中，由于第 7 条和第 8 条公理是以公理模式的形式给出的，因此，对应于任意的满足形式 $A(x)$ 或者 $A(x,y)$ 的一个条件，就有一条相应的公理，由此看来，ZF 系统其实是一个由无数多条公理所构成的系统. 同时，上述 10 条公理也不都是独立的，不都具有理论上的相对独立性. 例如，其中的第 7 条公理，完全可以由第 8 条公理导出. 但由于 ZF 系统公理的选择是以现代公理的方便性为标准的，而公理 7 在应用上恰好满足了这一特征，故

仍然把它保留在系统的公理集合中.

在有关集合理论的文献中,常常把上述系统中除开公理 8 的系统,称为策梅罗系统,记为 Z 系统;而把公理 1 ~ 9 构造的系统称为 ZF 系统;把公理 1 ~ 10 构造的系统称为 ZFC 系统.

以上,我们陈述了 100 余年来的集合理论和集合论的产生、发展的重要阶段,区别了集合理论和集合论,介绍了集合论最具有代表性的现代成果. 但整个陈述、介绍无疑地都只能是粗略的. 笔者的目的只在于让读者由此建立一些关于集合、几个理论和集合论的初步印象,明确集合论之所以成为理论科学的基础,从而自觉地为这种纯抽象思辨、纯形式化的学科去付出自己的辛劳. 并且由集合论的发展历史来看,集合论始终是在逻辑和数学学科的前提下来进行讨论的,这要求我们在学习这门学科时,无论如何都要具备一些相应的数学和逻辑学的基本知识.

思考与练习

1. 集合理论与集合论有何联系与区别?

2. 什么是潜无穷?什么是实无穷?两者的区别是什么?举例说明.

第二章 集 合

本章的主要内容是关于集合、集合的性质.重点内容是关于什么样的集合才是我们可以接受的集合?我们该怎样去正确地构造集合?

第一节 集合的概述

集合是集合论所讨论的对象.但究竟什么是集合?这的确是一个难以回答的问题.在各种各样关于集合的定义或者描述中,尽管人们通常使用"汇集"、"整体"、"单体"或"一堆东西"等作为集合的属,希望能由此给出集合的明确的定义,但最终的分析表明,这些"属"都不过是集合的一些俗语俗称,因此所有的定义或者在逻辑上是循环的,或者最终会因为这些定义导致集合悖论.所以我们在这里所介绍的集合,援引 20 世纪初以来的惯例,把集合同几个与之关系密切的概念,通通作为不予定义的原始概念来加以处理.

一、集合在康托尔描述中的确定性和不确定性

什么是集合?康托尔认为,所谓集合,"是我们直觉中或者理智中的确定的、互不相同的事物的一个汇集,它被设想为一个整体

(单体).”尽管由于这个描述性定义在逻辑上是循环的,并且缺乏形式理论所必备的客观性,因此作为集合的定义带有不确定性.但是,从理论直观的角度来看,在集合的康托尔描述中,除开那些主观的因素,应当说明显地也从集合的外延方面对集合作了一个明确的说明,即集合是由集合中的每一个确定的、互不相同的、被我们称为元素的事物构成的.康托尔集合描述中的确定性反映了集合的两个基本的性质:

一、任何一个集合的元素都是确定的.换言之,对任何一个确定的集合和任意的一个元素 x 来说,x 要么属于这个集合,要么不属于这个集合,没有其他任何选择的可能性.

二、任何一个确定的集合,其元素都应该具有不可重复性.不可重复性是说,如果元素 x 和 y 都属于同一集合并且 $x = y$,则 x 和 y 只能被视为该集合中的同一个元素.

此外,康托尔关于集合的描述实际上还强调了:任何一个集合都应该被看成是一个整体或者单体.从他对“无穷”的区别和关于“潜无穷”与“实无穷”的理论上看,任何一个确定的集合,其元素都应该是被完整地把握了的对象,而绝对不是个别元素的简单积累.

既然康托尔的集合被看着是从集合外延方面的一种直觉,而集合的外延就是集合的元素,那么人们自然会问,集合的元素又是什么?

集合的元素依然是集合.事实上,一个集合以另外一些集合为其元素的情况在人们的认识中是具有普遍意义的.例如,假定所有的空间几何图形构成一个集合,那么其任一元素本身当然还是一个集合,它的元素只需要被看成是面就可以了;但如果被看成是面的话,那么其中的任何一个面依然还会是集合,其元素至少可以被认为是点,如此等等.事实上,在相关领域的任何一个确定的集合中,我们都可以说明它的某个元素又该是怎样的一个集合.因此,集合的这种认识方法,应当说是在形式上具有共性的一种认识方

法．但既然集合的元素依然是集合，因此，希望从集合的外延方面一般地去直觉集合显然也是不恰当的，正因为如此，经历了罗素悖论冲击以后的学者包括罗素本人，都把集合作为集合论中一个不加定义的原始概念来处理．当然，既然集合的元素是集合，这就不能避免我们也把集合的元素也处理为一个原始概念．

既然说关于集合的认识方法是在形式上具有共性的一种认识方法，既然集合的外延即元素也依然是集合，因此集合也只能是一个原始的概念，这就要求我们在关于集合的讨论中，需要小心谨慎地去分析、处理涉及集合的所有性质、集合之间的关系等，表现在集合的构造方面，就是我们下述重点讨论的内容．

二、集合论涉及的两个基本关系

在集合论的讨论过程中，我们通常会提及的关系是“属于”和“相等”关系．一般来说，在公理集合论中，它们常常被处理为无须定义的原始概念．

元素 x 属于集合 A，我们记为 $x \in A$；元素 x 不属于集合 A，我们记为 $x \notin A$．其中，$\in$，$\notin$ 分别表示“属于”和“不属于”．

“属于”关系所反映的是一个确定的集合及其外延即元素之间的关系．$x \in A$，即 x 是集合 A 外延中的一个确定的元素，而当 $x \in A$ 时，我们通常也称为 x 包含于 A 或者 A 包含 x．

集合 A 等于集合 B，我们记为 $A = B$；集合 A 不等于集合 B，记为 $A \neq B$．$=$，$\neq$ 分别表示“等于”和“不等于”．表达式 $A = B$ 通常被理解为记号 A 与 B 表达同一个集合，A，B 此时不过是同一集合的不同表达符号而已，它们之间因此是可以互相代替的．即

如果 $a \in A$ 并且 $a = b$，那么一定有 $b \in A$．

回顾一下上述的讨论对以下的内容的理解是有帮助的．我们以原始概念的方式给出了集合、集合的元素、属于和等于关系，并

且对它们作了直观的说明.在这里,人们自然会提出一个非常明显的问题:既然集合的元素也是集合,那么为什么不说属于关系是集合和集合之间的关系,而要有区别地强调为集合元素与集合之间的关系呢?这只是一个纯技巧性的提法还是带有本质性区别的提及方法呢?其实,这并不只是一个纯技巧性的而是带有本质性区别的提及方法.它反映了集合论与集合理论的根本差别,即在集合层次上的严格区分.因为事实上,集合悖论的一个主要来源,就是因为集合层次的混乱而导致的.

三、关于基本关系的外延公理

外延公理 对于任意的集合 A 和 B,若对任意的元素 x,都有 $x \in A$ 当且仅当 $x \in B$,那么,$A = B$.

外延公理所涉及的仅仅是属于和等于这两个基本的原始关系.它给出了集合相等的充要条件和判定方法,即只要集合所包含的元素全部相同.例如,以 A,B 分别表示“等边三角形”和“等角三角形”,几何学的知识使我们知道,对任一三角形来说,它是等边的当且仅当它是等角的,即它属于 A 当且仅当它属于 B,因此,A 和 B 实际上表达的是同一个集合,当然有 $A = B$.

外延公理之所以称为“外延”,是因为它只是建立在集合的外延基础之上的.但是,公理所涉及的基本关系即“属于”和“等于”,在公理应用的实质上却并不是相同的.这是因为,相对于“属于”关系来说,“等于”关系可以说是一个前集合概念.所谓前集合概念,是说“等于”关系在一般意义上原本所具有的涵义如相同、重合、同一等这些反映事物之间的不可分辨性的特征,恰好为外延公理所吸收、肯定和应用.人们按照“等于”关系这些原本的含义去理解、判定集合之间的相等,是不会错误的.反之,人们同样按照外延公理所肯定的相等关系去理解一般含义上的事物之间的相等,

也是不会出错的. 但"属于"关系却并不如此,尤其是在一般的语用习惯中并不如此. 例如,以 A,B 记两个不同的人,假设 A,B 所拥有的物品是完全相同的,没有任何不同的物品. 显然,在此假设之下,对任意的物品 x 来说,都有 x 属于 A 当且仅当 x 属于 B,那么,我们能由此断言 $A = B$ 吗?显然不能. 对物品拥有权的完全相同,并不能推出拥有者本身的相同,所以,这样的外延关系就不是外延公理所主张的外延关系. 因此,对外延公理必须强调以下几点:

首先,本公理称为外延公理,并不简单地只是一个称谓上的问题,它表明本公理在应用上只与集合的外延相关而与集合的内涵没有联系.

其次,外延公理实际上规定了不定义关系"$\in$"在集合论中的用法,即它只是反映元素同集合之间的关系,而与集合或者集合的其他任何内容都没有关联.

再次,外延公理在有的集合理论的论述中成为以"$\in$"定义"$=$"关系的依据,但在关于集合的讨论中,这并不能导致其他任何不同的结果,仅仅是一种方法上的不同处理而已,但对此结论的理解,应当始终在"关于集合的讨论"这个前提之下来理解.

最后,外延公理在上述理解之下,其逆命题为真,即如果集合 $A = B$,则对任意的元素 x 都有,$x \in A$ 当且仅当 $x \in B$.

推论 集合 $A \neq B$,当且仅当存在某个元素 x,使得 $x \in A$,但 $x \notin B$,或者存在某个元素 y,使得 $y \in B$,但 $y \notin A$.

四、空集存在公理

以上我们对集合的讨论,都是建立在一种假设的基础之上的,即假设集合这种对象是实际存在的. 但事实上,到现在为止,我们所涉及的所有理论,都不能保证确实有集合这样的对象存在. 下面建立的空集公理,就是针对上述理论的这一不足的.

空集公理　存在一个不包含任何元素的集合.

空集公理的确立有下述两方面的意义：

一方面，我们以理论的形式，断言在集合中至少存在一个集合是言之有据的，使得集合论决不至于建立在空洞无物的基础之上；

另一方面，我们以公理的形式承认，不含有任何一个具有确定性、不重复性的事物的"汇集"或者"整体"依然是一个集合，从而排除了一般总以为集合一定要包含有元素的观念.

空集公理从形式语言的角度可以较为准确地叙述为：存在集合 A，使得对任意的元素 x，都有 $x \notin A$. 下面，我们为空集公理所肯定存在的集合定义一个名称，以便于后面的讨论.

定义　不包含任何元素的集合称为空集合，记为 $\varnothing$.

定理　空集 $\varnothing$ 是唯一的.

证明：假设集合 A,B 都是空集，由空集的定义，对任意的元素 x，都有

$$x \notin A \text{ 则 } x \notin B;$$

同样有 $x \notin B$ 则 $x \notin A$. 在逻辑形式上，这等于说，

$$x \notin A \leftrightarrow x \notin B;$$

由逻辑定理 $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \leftrightarrow \sim q)$，有

$$x \in A \leftrightarrow x \in B,$$

再由外延公理，当然有

$$A = B,$$

即空集 $\varnothing$ 只能是唯一的.

第二节　集合论的公式与集合的条件

前面介绍的集合、元素、元素对集合的属于关系、集合对集合的等于关系等都是作为原始概念给出的.并且,除了空集,我们对于一般的集合可以说还是一无所知的.其实,没有其他恰当的必要条件,仅靠上述的原始概念是无法去正确地理解、或者正确地去构造一般的集合的.那么,正确地理解、或者正确地去构造一般的集合,并且因此能够正确地去处理好集合与集合之间的关系,还需要什么样的条件呢?

从人们的一般经验来看,往往认为可用一句合乎语法(甚至可以加上也符合逻辑的这一条件)的语句,来表达某一集合的元素的条件,语句的意义是否是明确的,这总是容易判定的.因此,某个元素是否属于某个集合,虽然在条件不明确时是难以判定的,但在条件明确时则总是可以判断清楚的.集合悖论的出现,对这种经验之说予以了否定.

一、贝尔利悖论

在贝尔利(G. Berry,1700～1782)悖论中,作为集合元素的条件的中文描述可以类似地表述为:"能用少于二十九个汉字的语句的笔画数表达的自然数",以此为条件,贝尔利所提出的问题相当于是:符合这个条件的自然数能否构成一个集合?

"能用少于二十九个汉字的语句的笔画数表达的自然数"作为集合元素的条件,在人们的经验世界中不能不说是非常清楚明确的了.例如,

公元前二百年

这是含有6个汉字的语句，其中，全部汉字的笔画数为31，故31应该是假定的集合中满足条件的一个元素. 再如，

明天的阳光依然灿烂

该语句中含有9个汉字，而全部汉字的笔画数为68，故68应该也是假定的集合中满足条件的一个元素.

在上述对31和68是否为所设想的集合中的元素的判定中，人们依赖的是经验直观，这种经验上的直观源于对集合元素条件含义的清楚明确的确信无疑，源于对满足条件的汉语语句终归是有限的确信. 因为，我们都知道，汉字的个数没有超过60000个，因此，用少于二十九个汉字组成的语句的数字也不会超过$60000^1 + 60000^2 + 60000^3 + \cdots + 60000^{28}$，虽然这个数字很大，但它毕竟是个有限数，并且，其中每一语句的笔画数都一定是有限且确定的. 因此，从人们的认识经验上看，满足条件能成为所设定的集合中的自然数首先应当是有限的，并且任意一个自然数是否在这个集合中也应当是可判定的. 但是，自然数是无限的，那些并非“能用少于二十九个汉字的语句的笔画数表达的自然数”似乎也应该构成以自然数为元素的另外一个集合，并且，由自然数集和自然数集的任意子集中都有一个最小数的这一性质(这个性质在后面再证明)，设这另外一个集合中最小的自然数为n_0，那么，n_0是“不能用少于二十九个汉字的语句的笔画数表达的自然数中最小者”. 于是，从n_0所满足的条件的语义上看，n_0应该属于那些“不能用少于二十九个汉字的语句的笔画数表达的自然数”所构成的集合；但从对n_0描述的语句的语形上看，n_0仅仅用了28个汉字就被描述出来了，因此，n_0又应该属于那个“能用少于二十九个汉字的语句的笔画数表达的自然数”所构成的集合. 那么，n_0究竟该属于哪个集合呢？假设满足给定条件的由自然数构成的集合分别是A和B，那么显然有自然数n_0(即B中最小者)，使得$n_0 \in B$，那么有$n_0 \in A$即

$n_0 \in B$,既然如此 A,B 能成为我们所讨论的集合吗?

贝尔利悖论的意义在于,它揭示了用自然语言所表述的集合元素的条件,即使是语言合乎语法并且含义清楚明确,也可能是无法构成集合的.

用自然语言所表述的关于集合元素条件的语句,对于条件是否被表达得清楚明确,事实上并不是一个易于判定的问题,它涉及"清楚明确"本身的标准,涉及人们对条件、对表述条件的用语的理解方法、角度、知识水平、认知事物的经验甚至心理的状态等.显然,这些因素都带有极为浓厚的主观主义色彩.在集合论中,依赖主观的意识去描述、构造理解集合,都是不符合形式理论的纯客观性要求的,毫无疑问,集合论恰好就是这样一门具有纯客观性要求的形式理论的科学.因此,用自然语言表述集合或者集合元素的条件都不是恰当的方法.当然,作为纯形式理论的集合论,在这个问题上无须去为本该让语言学家苦恼的问题而苦恼.集合论只从纯形式的角度去考虑集合、考虑集合与集合之间的关系.因此,从纯形式这一特点考虑,我们下面将把条件的表述限制在一个非常确定的范围之内.

二、集合论的公式

形式语言

甲类符号:$a,b,c,d,e,\cdots,w,x,y,z,\cdots,a_1,b_1,\cdots$;

$A,B,C,D,E,\cdots,W,X,Y,Z,\cdots,A_1,B_1,\cdots$

乙类符号:1. $\in$, $=$

2. $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

3. $\forall$, $\exists$

4. (,)

甲类符号都是集合符号,在没有特定说明情况下,其中的小写

字母一般作为集合的元素符号，大写字母通常作为集合符号. 大、小写字母中的 $W,\cdots,Z$ 和 $w,\cdots,z$ 通常作为集合变项，而其他的作为集合常项.

乙类符号都是联结符号. 其中的 1 类符号是反映集合之间的关系的；2,3,4 类符号都是逻辑符号，2 类符号从左到右依次为否定词、合取词、析取词、蕴涵词和等值词，它们都是用以联结公式的；3 类符号是全称量词和存在量词；4 类符号是左括号和右括号，它们都是分隔符.

集合论公式的递归定义：

1. $(a \in b)$ 和 $(a = b)$ 都是公式，并称为原子公式. 其中的 a,b 可由任意集合符号代替；

2. 如果 φ,ψ 是公式，那么 $(\sim \varphi)$，$(\varphi \wedge \psi)$，$(\varphi \vee \psi)$，$(\varphi \rightarrow \psi)$，$(\varphi \leftrightarrow \psi)$ 都是公式；

3. 以 $\varphi(x)$ 记含有 x 的一个公式（也可以含有其他集合符号，例如 $\varphi(x,y)$，$\varphi(a,x)$ 等），那么，$\forall x\varphi(x)$，$\exists x\varphi(x)$ 也都是公式；

4. 除了以上 3 条所列外，如果没有特定的说明，在系统中出现的其他符号或符号串都不是公式.

集合论公式的定义，一方面定义了理论系统中纯形式的合法语句，另一方面，作为递归定义，也提供了识别系统中不合法语句的一种能行的工具. 例如，由定义容易判定，形如 $x \in A$，$\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$ 都应当是系统中的合法语句，即它们都是集合论需要讨论的公式；而如 $xx \in A \wedge \exists \forall \varphi(x,y)$ 这样的符号串则不是我们所要讨论的对象.

定义了集合论的公式以后，前面所讨论过的外延公理和空集公理，我们可以分别表示如下：

外延公理　$\forall A \forall B(\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \rightarrow A = B)$.

空集公理　$\exists A \forall x(\sim (x \in A))$.

对于集合的语句（即公式），从简洁好用的角度出发，作出某些

形式上的转换或替代是明智的，这可以使讨论的过程变得简单.在系统的构建过程中，转换主要是通过定义和说明来进行的.

定义 1. $(a \notin b) = (df(\sim (a \in b)))$.

2. $(a \neq b) = (df(\sim (a = b)))$.

例如，上述的空集公理，我们以后可以根据定义简单的表示为

$$\exists A \forall x(x \notin A).$$

说明 在不至于引起误会的前提下，公式中的某些括号是可以省略的.我们知道，乙类符号中的 2 类逻辑符号，在没有任何括号的前提下，它们的联结力度以 $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ 的顺序是依次减弱的，既然如此，我们当然可以利用这一特点来使用括号.例如，在公式

$$((x \in A \leftrightarrow x \in B) \wedge (a = B)) \vee (\exists A \forall x(x \notin A))$$

中，我们依据 $\wedge$ 和 $\vee$ 的联结力度，去掉 $\vee$ 两边公式的外层括号，记为

$$(x \in A \leftrightarrow x \in B) \wedge (a = B) \vee \exists A \forall x(x \notin A)$$

的形式，完全不影响公式原本含义的表达.

如上述的说明或者定义的方式，在随后的叙述中如果需要，我们还会根据需要随时给出.

三、集合论的条件

集合论的公式为我们提供了讨论集合时所考虑的形式语言的范围.现在，我们以集合论的公式为基础，来定义集合论所考虑的条件.

集合论的条件 公式 $C(x)$ 是 x 的一个集合论条件，当且仅当 $C(x)$ 是含有 x 的一个公式（公式中也可以含有其他的字母，如 $C(x,y)$, $C(a,x)$ 等），且在 $C(x)$ 中不含有 $\forall x$ 和 $\exists x$.

例如，公式 $x = x$ 和 $x \neq x$，都可以成为集合论中关于 x 的集

合论条件，虽然，在集合论的讨论中，满足前者的 x 比比皆是，而满足后者的 x 不可能存在，但这并不妨碍它们同样成为集合论中关于 x 的条件；再如，对于公式 $x \in A$ 和 $x \notin A$，只要满足条件：在 A 中不含有 $\forall x$ 和 $\exists x$，它们同样也能成为集合论中关于 x 的条件. 显然，从谓词逻辑的角度看，集合论条件 $C(x)$（公式中也可以含有其他的字母，如 $C(x,y)$，$C(a,x)$ 等）在能行可构造的纯公式形式的基础上，被要求为关于 x 的一个严格的命题函项.

集合论的条件我们以后通常简称为条件.

集合元素的某个条件　对于某个已知的条件 $C(x)$（公式中也可以含有其他的字母，如 $C(x,y)$，$C(a,x)$ 等），若存在某个集合 A（A 不在 $C(x)$ 中出现），恰好包含满足 $C(x)$ 的一切 x 为其元素，即有

$$\exists A \forall x(x \in A \leftrightarrow C(x)),$$

则称 $C(x)$ 是使 x 成为集合 A 的元素的一个条件. 并记集合 A 为

$$A = \{x \mid C(x)\}.$$

在关于集合元素的某个条件的定义中，唯一的要求是字母 A 不得在 $C(x)$ 中出现. 这一要求是为了排除集合 A 成为集合 A 的元素的任何可能性.

集合 A 的元素 x 的某个条件，是在特有的形式语言即公式的基础上表述的. 但对集合 A 的元素 x 来说，这样的条件可能并不是唯一的. 例如，公式 $x \in x$ 和 $x \neq x$，都可以成为集合 A 的元素 x 的条件，虽然它们的意义是不相同的，但在随后的讨论中我们能够证明，满足这两个条件的 x 都是不存在的. 因此，由它们所描述的集合

$$\exists A \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in x)$$

和

$$\exists B \forall x(x \in B \leftrightarrow x \neq x)$$

都只能是空集，即 $A = B = \varnothing$.

集合论的条件和集合 A 的元素 x 的某个条件，是公理集合论的基础理论，其重要的理论意义在于，它排除了在讨论集合理论的过程中，人们对所使用的自然语言符号的含义在理解、应用等方面的主观因素，特别是其中的个人认识经验的因素和心理方面的因素. 而建立在集合论公式基础上的集合论的条件和集合 A 的元素 x 的某个条件，都是可以在基于同样的含义和相同的规则基础上给出明确地、确定地客观分析，公正地评估，并由此去确定以怎样的方式构造集合，讨论集合，确定集合之间的关系并进而在实践中去充分地利用集合理论的价值.

在应用集合论的条件和集合 A 的元素 x 的某个条件时，我们应当注意以下几点：

首先，集合论的条件是以集合论的公式为基础的，这实际上是为集合论条件的语言表达方式划定了一个范围. 因此，对任何即使是合乎语法也含义明确的自然语言表达的语句，除非它在形式上能够被表达为集合论的条件，否则在集合论的严格论述中是不会考虑它的.

其次，对集合 A 的元素 x 的某个条件 $C(x)$ 的讨论，是以肯定集合 A 的存在和在条件 $C(x)$ 中不含有 A 为前提的. 这里要注意两点. (1) 集合 A 的元素 x 的某个条件，是对某个确定的集合 A 中的元素加以描述、表达的方式，这同以“符合某个条件的元素 x”构成某个集合在意义上是完全不相同的. 如果对元素 x 的某个条件的使用不注意这个前提上的差别，而以后一种方式使用的话，那么既同集合被处理为原始概念的初衷相悖，也会因为元素条件的作用失去限制而在集合理论系统中引发集合悖论. 例如，考察 x 的条件 $x=x$，我们知道，任何一个集合都是满足这个条件的，预先没有某个确定的集合，我们只是在一个确定的集合中以此条件来描述它的元素，那么就会导致所谓的最大的集合，从而导致集合悖论. 所以，集合元素的某个条件 $C(x)$ 尽管通常被表示为某个确定集合的

元素的一个充要条件，但并不是元素 x 可以构成集合的充要条件.

(2) 在集合 A 的元素的某个条件 $C(x)$ 中，要求字母 A 不得在 $C(x)$ 中出现. 如前所述，这一要求是为了排除集合 A 成为集合 A 的元素的任何可能性. 罗素为这个要求的必要性提供了一个典型的例证. 他为 x 提供的条件 $C(x) = x \notin x$，假设对确定的集合 A，有

$$A = \{x \mid x \notin x\}.$$

由于 x 是集合，A 也是集合，如果不排除 A 在条件 $C(x)$ 中出现的可能性，那么就有 $A \notin A$，现在要问的是，集合 A 是否是集合 A 中的元素？由上述条件显然有

$$A \in A \rightarrow A \notin A \rightarrow A \in A \cdots$$

这表明，如果违反 $C(x)$ 的规定，我们显然将面对一个永无休止的推断，同时也肯定是一个永远无法消除的逻辑矛盾.

思考与练习

1. 什么叫集合论的公式？

2. 什么是集合论的条件？

3. 什么是集合元素的条件？元素的条件与集合论的条件有何区别与联系？

4. 为什么说集合具有不可定义性？

第三章　集合的基本运算

在讨论集合的过程中,对给定的集合,我们常常需要经过一些基本的运算,如并、交、差、幂,从而构造出新的集合,因此,基本的运算方法是我们构造集合的一种重要的方法.在讨论这些方法之前,我们先来建立关于两种重要的集合的概念.

第一节　子集

一、子集公理

公理　对于x的每个条件$C(x)$和给定的集合B,都存在一个集合A(A不出现在$C(x)$中),使得A恰好包含B中的一切满足条件$C(x)$的元素x.即

$$\forall B \exists A(\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B \wedge C(x))).$$

在明确B是任意给定集合的前提下,为了突出集合A对B的包容于关系,上面的公式可以简化为:

$$A = \{x \in B \mid C(x)\}.$$

即集合A是由集合B中所有满足条件$C(x)$的元素x构成的.

前面在讨论条件$C(x)$时曾断言,在没有确定的集合范围的情

况下使用条件$C(x)$，那么满足该条件的一切x不必然构成一个集合，罗素悖论可以间接地证明这一观点．但如果有了确定的集合的范围，在这个范围中考虑那些满足条件$C(x)$的x，从形式理论的角度来说，这些x中的每一个都不但是被认知了的、被确定把握了的对象，而且对它们的认知过程也总是有限的．子集公理所反映的就是对集合的具有这种特点的认知过程．因此，子集公理的正确性当然是不言而喻的．

二、子集的定义与性质

定义　集合A称为集合B的一个子集，如果A的元素都是B的元素．即

$$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B).$$

如果集合A是集合B的一个子集，我们称集合A包容于集合B，记为

$$A \subseteq B.$$

其中，符号"$\subseteq$"表示"…包容于…"．A包容于B，也可读为B包容A，当集合A是B的一个子集时，也称集合B是A的一个包容集．

在上述定义中，当且仅当$A \subseteq B$并且$A \neq B$时，称A是B的一个真子集，记为

$$A \subset B.$$

包容于或者包容关系，是以集合、集合的属于等原始概念为基础所严格定义的第一个集合与集合之间的关系，我们有必要对它们的性质加以讨论．由子集的定义，包容（或者包容于）关系应当具有下述基本性质．

性质　对任意的集合A,B,C来说：

1．自返性成立．即

$\forall A(A \subseteq A)$.

包容关系的自返性，由子集定义来看是非常明显的，但要注意的是，这里的包容关系是排除了真包容关系的.

2. 反对称性成立. 即

$$\forall A \forall B((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \rightarrow (A = B)).$$

具有包容关系的任意两个集合之间不具有对称性，这由外延公理是不难证明的，证明留给读者做练习. 但要注意的是，这里的包容关系仍不包含真包容关系. 如果由集合 A，B 的互相包容，依据外延公理能够推出二者相等，那么，由集合 A，B 的互相真包容只能推出断定上的逻辑矛盾.

3. 传递性成立. 即

$$\forall A \forall B \forall C((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \rightarrow (A \subseteq C)).$$

包容关系的传递性由子集公理不难证明. 但同前两个性质不同，包容关系的传递性同样适合于具有真包容关系的集合. 即

$$\forall A \forall B \forall C((A \subset B) \wedge (B \subset C) \rightarrow (A \subset C)).$$

三、关于子集的几个基本定理

在子集公理的条件中，对任意给定的集合 B 来说，任意的条件 $C(x)$，在 B 中都能确定与之对应的一个子集，从这个角度来说，集合 B 的子集不会是唯一的. 现在的问题是，尽管由条件 $C(x)$ 的多样性，使得集合 B 的子集也是多种多样，但对任何一个给定的条件如 $C'(x)$ 来说，B 的子集还会是多样的吗？

子集唯一性定理　对条件 $C(x)$ 中任意给定的条件 $C'(x)$ 而言，$C'(x)$ 所确定的集合 B 的子集 A 是唯一的.

证明：我们在任意的条件中任意取定一个记为 $C'(x)$，对于任意给定的集合 B，如果满足条件 $C'(x)$ 的子集既有 A 又有 D，那么，显然有

$$\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B \wedge C'(x));$$
$$\forall x(x \in D \leftrightarrow x \in B \wedge C'(x)).$$

所以，必然有

$$\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in D).$$

由外延公理，当然有

$$A = D.$$

这表明，对任意给定的集合 B 和给定的某个条件而言，满足这个条件的 B 的子集只能是唯一的.

包容关系的自返性表明，任何集合都至少有一个子集即该集合自己，这个性质同属于关系的性质，即任何集合都不能属于自己是如此明显的不同.

下面我们证明，任何集合都还有一个必然的子集即空集.

定理　空集是任意集合的子集. 即对任意集合 B 有 $\varnothing \subseteq B$.

证明：设 B 是任意的集合，由子集定义，我们只需证明

$$\forall x(x \in \varnothing \rightarrow x \in B)$$

总是成立的就可以了.

事实上，对任意 x，$x \in \varnothing$ 总是假的，所以

$$(x \in \varnothing \rightarrow x \in B)$$

总是真的，即

$$\forall x(x \in \varnothing \rightarrow x \in B)$$

总是真的. 由子集定义，

$$\varnothing \subseteq B.$$

下面，我们利用已经建立起来的公理和定义，来证明本节的一个重要结论，即

定理　不存在包含一切集合的集合.

包含一切集合的集合被称为"万有集"，本定理断言，这样的集合是肯定不存在的.

证明：显然，我们只要能证明，对于任意给定的集合 A 来说，都

存在某个集合 B，使得 B 不属于 A 就可以了.

由子集公理，我们以集合 A 为包容集，给定元素 x 的条件 $C(x) = x \notin x$，那么必定有唯一的子集 B 存在，使得

$$B = \{x \in A \mid x \notin x\}.$$

或者，用子集公理的完整表达形式，为

$$\forall A \exists B(\forall x(x \in B \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin x)).$$

以下，我们就利用这个表达方式来证明 $B \notin A$.

假如集合 $B \in A$，则在集合 A 中，A 的元素 B 要么属于 A 的子集 B，要么不属于 A 的子集 B，即对于给定的条件 $x \notin x$ 和集合 A 的元素 B，必然有

$$(B \in A \wedge B \notin B \rightarrow B \in B)$$
$$\leftrightarrow((B \in A) \rightarrow ((B \notin B) \rightarrow (B \in B))).$$

或者

$$(B \in A \wedge B \in B \rightarrow B \notin B)$$
$$\leftrightarrow((B \in A) \rightarrow ((B \in B) \rightarrow (B \notin B))).$$

显然，只要肯定 $B \in A$，就会由 $(B \notin B) \rightarrow (B \in B)$，或者由 $(B \in B) \rightarrow (B \notin B)$，这是一种无法消除的逻辑矛盾即悖论，所以，$B \notin A$. 由子集公理和集合元素的确定性，存在确定的集合 B 不能为 A 所包含，故定理成立.

"万有集"不存在定理的证明过程，充分地利用了罗素悖论的理论. 并且，定理所否定的，实际上还是罗素悖论的一种变种，从表现上看，"万有集"实际上仍然是把集合之间的属于关系和包容于关系混为一谈，导致集合在层次上出现混乱的结果. 而这些，也正是人们建立公理集合系统所希望排除的. 应当指出的是，本定理只是从集合范围的"最大"角度来揭示集合层次的混乱必然会引发逻辑矛盾，但事实上，引发逻辑矛盾的可能性是多方面的，例如，以条件 $x = x$，以条件 $x = x \cup \{x\}$(集合 x 与 x 的后继相等)等，都可能产生逻辑矛盾. 集合论的一个重要任务，就是通过公理系统的

建立，通过定理的证明，通过对各种关系的分析、揭示，使我们能明确地知道，什么样的集合，或者怎样去构造的集合，才是我们可以承认、接受的集合，而什么样的集合，却是我们必须予以拒绝的集合. 并且，通过对子集公理的分析，对子集的性质的讨论，也应当使我们理解到，在我们常常使用"任意"、"所有"、"一切"等全称量词时，它们所概括的对象都不应该是无限的，而总应该是就某个确定的范围而言的.

推论 不存在集合，包含一切满足条件 $x = x$ 的 x.

证明留给读者做练习.

思考 把推论中的条件放在给定的集合 A 中考虑，那么，这样的集合是否存在？它和集合 A 的关系如何？

现在，我们对集合论的条件，集合元素的条件应当说都有了更多的更具体的理解. 在混淆了集合之间的属于和包容关系的前提下，肯定是不能构造我们可以接受的集合的. 而集合元素的条件在离开了包容集的制约前提下，一般来说也是不能构造一个合法的集合的. 称后者为一般的，在不能排除需要的时候，在没有包容集时，我们也需要使用一些特殊的方法去构造集合. 比较一下集合元素常常利用的下面几个条件，对这种作法的理解是有帮助的.

$x = x$ 和 $x \notin x$，这些条件对任意 x 都是满足的，但离开了包容集，满足这些条件的集合都不是可以接受的.

$x \neq x$ 和 $x \in x$，这些条件对任意 x 都是不满足的，但即使离开了包容集，满足这些条件的集合都是可以接受的，因为这样的集合只能是空集.

第二节　偶集

在本节内容的讨论之前，我们实际上都是在一般地或者假设性地讨论集合，即假设集合这种对象存在，那么它的表达方式，它应该具备的条件，在什么情况下构造的集合是不可接受的等，至于具体的或者实实在在的集合，由空集存在公理，就只有一个唯一的空集. 现在的问题就是，我们能否以这个唯一实在的空集为基础，建立一种能行的方法，从而构造出其他形形色色的具体的集合. 上节内容结束时我们提出，构造合法集合的方式有时是需要特殊方法的，下述内容可以说就是这样的方法的一种体现.

一、偶集公理

上述问题所涉及的一般思路实际上是：若给定集合 a，是否一定存在集合 A，使得 A 恰好以集合 a 为它的元素？即

$$A = \forall x(x \in A \leftrightarrow x = a)$$

是否为一个合法的、我们可以接受的集合. 沿这样的思路展开，对于任意给定的两个集合 a 和 b，是否一定存在集合 C，使得 C 恰好以集合 a，b 为元素. 即

$$C = \forall x(x \in C \leftrightarrow x = a \lor x = b)$$

是否为一个合法的、我们可以接受的集合，如此等等. 显然，如果以这样的思路去构造的集合都是合法的，都是我们可以接受的，而我们又有足够的时间和兴趣，那么，只要给定了某个集合（如空集就已经给定），尽管不存在包容集，我们还是能构造出无数多的实实在在的集合来，而不至于去过分的担心我们所讨论的集合是否存

在的问题.前面已经建立起来的理论,都不足以保证沿这样的思路去构造的集合的合法性,同样也并不构成对此方法的否定.因此,我们首先需要建立新的公理来保证这种做法的合理性.为了简便,对上述思路中涉及的两种情况,我们建立的公理只保证第二种情况的合法性,而把第一种情况作为第二种情况的特例来加以处理.

偶集公理　对任给的集合 a 和 b,存在集合 A,A 恰好以 a,b 为元素.即

$$\forall a \forall b \exists A(\forall x(x \in A \leftrightarrow x = a \vee x = b)).$$

以公理的形式肯定上述思路在构造集合中的合法性,意味着凡是由此思路所构造的集合在集合论公理系统中都是我们能够接受的.例如,给定集合 $\varnothing$,φ,那么,无论集合 $\varnothing$,φ 是什么样的集合,集合 $\{\varnothing, \varphi\}$ 都应该是一个可以被接受的集合.

偶集唯一性定理　对任意给定的集合 a,b,偶集公理所肯定存在的集合 A 是唯一的.

以偶集公理的方式,我们可以构造出无数多的集合,但对于给定的两个集合,所能够构造的集合却只能是唯一的.

证明:由偶集公理,有

$$\forall a \forall b \exists A(\forall x(x \in A \leftrightarrow x = a \vee x = b)).$$

在集合 a,b 给定的情况下,集合 A 可以表示为:

$$A = \{x \mid x = a \vee x = b\}.$$

现在满足公理的还有集合 B,显然,也有

$$B = \{x \mid x = a \vee x = b\}.$$

此即是

$$\forall a \forall b \exists B(\forall x(x \in B \leftrightarrow x = a \vee x = b)).$$

比较 A,B 元素的条件,都是

$$x = a \vee x = b,$$

所以对集合 A,B 的任意元素,都有

$$x \in A \leftrightarrow x \in B.$$

由外延公理,必然有

$$A = B.$$

即对任意给定的集合 a,b,偶集公理所肯定存在的集合 A 只能是唯一的.

二、偶集的定义

定义 对给定的任意集合 a,b,记

$$\{a,b\} = \{x \mid x = a \vee x = b\}$$

为一集合,并称为以集合 a,b 为元素的偶集.

在偶集中,因为元素 x 的条件有

$$(x = a \vee x = b) = (x = b \vee x = a),$$

所以一定有

$$\{a,b\} = \{b,a\}.$$

正因为如此,我们通常把偶集也称为无序集.

在偶集的定义中,对任意给定的记号 a、b,并没有特别限定 $a \neq b$,所以,出现 $a = b$ 也是完全可能的. 但当 $a = b$ 时,所构造的偶集在形式上为 $\{a,a\}$,由集合元素的互不相同性,此时的两个元素 a 只能作为一个元素处理,所以有

$$\{a,a\} = \{a\}.$$

定义 记 $\{a,a\} = \{a\}$ 为一集合,并称为以任意给定的集合 a 为元素的单集. 即

$$\{a\} = \{x \mid x = a\}.$$

单集显然是以给定集合 a 为唯一元素的集合. 这里特别需要提醒读者注意的是集合 a 和集合 $\{a\}$ 的区别. 从形式上说,两个集合符号所表达出来的关注对象是不相同的. 对集合 a 我们此时无法关注到它的元素,因此我们此时关注的是作为集合 a 的本身;而对集合 $\{a\}$ 我们此时能够关注到它的元素,因此我们此时关注的

既可能是集合$\{a\}$本身，也可能是作为集合元素的集合a. 这两种关注显然是不同的关注. 这种不同，用我们前面建立起来的形式理论是不难区别的：对集合a来说，$a \subseteq a$但$a \notin a$；而对集合$\{a\}$来说，$a \in \{a\}$但a不能包容于$\{a\}$. 从逻辑的词项理论来看，表达集合a的只能指称一个单体或由具有某种属性的同类元素所构成的整体，因此是集合词项；而表达集合$\{a\}$中的集合a的词项，指称的是某个集合中的具有条件$C(x)$的某个元素（尽管在这里集合中只有一个元素），因此对集合$\{a\}$来说，表达集合a的词项应当是一个非集合词项.

现在，建立了偶集公理之后，至少在确定的空集$\varnothing$的基础上，可以构造出下述我们能够接受的集合：$\{\varnothing\}$，$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$，$\{\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$，如此等等.

第三节 集合的并运算

在以下的讨论中，我们涉及的主要对象将包括集合的元素和元素的元素. 为了区分集合的不同层次，在以下对集合的提及中，我们将把原来的集合称为集组，而把原来集合的元素称为集合或者成员，而把元素这一称谓作为集组的成员（或集合）的元素的特定称谓. 在上述的约定下，本节所希望回答的问题是：一个集组的所有集合的元素汇集到一起，能否构成一个人们能够接受的集合？

一、并集公理

对于一个给定集组的所有集合的元素，就我们在前所建立起来的理论而言，显然我们还不能为它们找出一个包容集来. 所以，从子集公理的角度来回答上述问题肯定是不恰当的. 因此，我们不得不在系统中建立一个新的公理.

并集公理 对任意给定的集组 M，存在一个集合 A，使得 A 恰好包含属于 M 的至少一个成员（即集合）的一切元素. 即

$$\forall M \exists A \forall x(x \in A \leftrightarrow \exists X(X \in M \wedge x \in X)).$$

在并集公理的形式语言表述中，集合 A 的元素 x 所满足的条件是：

$$C(x) = \exists X(X \in M \wedge x \in X).$$

显然，这个条件准确无误地刻画了集合 A，即 A 是所有的那些属于集组 M 的至少一个成员 X 的元素所构成的. 为了简化，上述条件以后通常缩写为：

$\exists X \in M(x \in X)$,

读为“x 是 M 的至少一个成员的元素”.

二、并集定义

定义　对于任意的集组 M,记

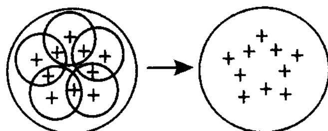
$$\bigcup(M)=\{x \mid \exists X\in M(x\in X)\}$$

为一集合,且称为集组 M 的成员的并集. 例如,给定集组 $A=\{\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$,则

$$\bigcup(A)=\{\varnothing,\varnothing,\{\varnothing\}\}=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}.$$

对于集组 M 所实施的动作“$\bigcup$”,称为对集组 M 求并,记为 $\bigcup(M)$ 或者 $\bigcup M$,简称为集组 M 的并集.

关于集组 M 的求并,可以有许多形象的比喻. 例如,我们可以把求并看成是在一个只装有集装箱的仓库中,把集装箱中的物品都放在仓库中并把集装箱从仓库中全部撤出. 此时,仓库中堆放的全部物品,就构成了仓库(集组 M) 的成员(集装箱) 的元素(集装箱中的物品) 的并集. 当然,其中相同的物品我们只把它们作为同一个元素. 用欧拉(Euler,1707 ～ 1783) 图可以表示如下:



由并集定义和子集公理容易证明:

$$\forall M\forall X(X\in M\to X\subseteq\bigcup(M)).$$

即,集组 M 的任一成员,都是集组成员的并集的子集. 这是因为,由并集定义,对任意元素 x 和 M 的任一成员 X 来说,都有

$$x\in X\to x\in\bigcup(M).$$

但要注意的是,我们虽然能证明 $X\in M$ 是 $X\subseteq\bigcup(M)$ 的充分条件,但却不能证明前者是后者的必要条件. 换言之,当 $X\subseteq$

$\bigcup(M)$ 成立时，不见得有 $X \in M$ 成立. 上面集装箱的例子就足以说明这个问题：当我们把堆放在仓库中的物品再放回集装箱时，每个集装箱的物品不见得就是集装箱原有的物品，而且，只要可能，我们还可以放入更多的集装箱来装放原有的物品.

三、并运算的性质

我们首先从我们已经建立起来的几个特殊的集合中来考察并运算的性质.

1. 空集的并等于空集. 即有

$$\bigcup(\varnothing) = \varnothing.$$

证明：若 $\bigcup(\varnothing) \neq \varnothing$，那么，$\exists x(x \in \bigcup(\varnothing))$，并且，由并集的定义，必然有

$$\exists X \in \varphi(x \in X)$$

成立. 这显然是同空集公理相矛盾的，故假设不能成立，即

$$\bigcup(\varnothing) = \varnothing.$$

2. 以集合 A 为元素的单元集的并集等于 A 本身. 即

$$\bigcup(\{A\}) = A.$$

证明：假设 $\bigcup(\{A\}) \neq A$，不妨设

$$\bigcup(\{A\}) = B.$$

那么，由并集定义，必然有

$$A \subseteq B;$$

由子集公理，对任意的 x，必然有

$$x \in A \rightarrow x \in B$$

成立. 但 $\{A\}$ 为一单集，由并集公理，显然又有

$$x \in B \rightarrow x \in A$$

的必然成立. 因此推出

$$x \in A \leftrightarrow x \in B;$$

由外延公理，即

$$A = B.$$

所以，

$$\bigcup(\{A\}) = A.$$

由于集合 A 的任意性，当然 A 也可以为空集，于是有

推论　$\bigcup(\varnothing) = \bigcup(\{\varnothing\}) = \varnothing$

3. 偶集的并集

在进行集合的并运算时，如果集组的成员有限并且数量相对较少时，为了书写上的方便，我们定义一种较简单的方式来表达并运算.

定义　对任意给定的偶集$\{A,B\}$，记

$$A \cup B = \bigcup(\{A,B\})$$

为一集合，并称为集合 A,B 的并集.

从条件的角度，上述并集又可以表示为

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\}.$$

容易证明，偶集的并运算具有以下的性质，即对任意的集合 A,B,C 有：

(1) $\cup$ 的交换律：$A \cup B = B \cup A$

(2) $\cup$ 的结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(3) $\cup$ 的包容律：$A \subseteq (A \cup B)$

$B \subseteq (A \cup B)$

(4) $\cup$ 的吸收律：$(A \cup \varnothing) = A$

$(A \cup A) = A$

下面，我们证明其中的结合律，而把其余的留给读者作为练习.

证明：$\forall x \in ((A \cup B) \cup C) \leftrightarrow (x \in (A \cup B) \lor (x \in C))$

$\leftrightarrow (((x \in A) \lor (x \in B)) \lor (x \in C))$

$\leftrightarrow ((x \in A) \lor (x \in B) \lor (x \in C))$

$$\leftrightarrow((x \in A) \vee ((x \in B) \vee (x \in C)))$$
$$\leftrightarrow((x \in A) \vee (x \in B \cup C))$$
$$\leftrightarrow x \in (A \cup (B \cup C)).$$

所以,由外延公理和 x 的任意性,必然有

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

需要强调的是,尽管上述性质的讨论是建立在偶集的基础之上的,但从理论上说,可以将它们的结果推广应用到集组成员有限并多于两个的一般情况上去.

并的运算、偶集的定义和前述的其他内容联系在一起,为我们合法地构造集合提供了较为自由的空间.例如,任意一个偶集都可以被表示为两个单元集的并集,因为对任意元素 x 来说,都有

$$x \in \{a,b\} \leftrightarrow (x = a \vee x = b)$$
$$\leftrightarrow (x \in \{a\} \vee x \in \{b\})$$
$$\leftrightarrow x \in (\{a\} \cup \{b\}).$$

既然如此,那么三元集显然是可以通过单元集和偶集来定义的,因为

$$x \in \{a,b,c\} \leftrightarrow (x = a \vee x = b \vee x = c)$$
$$\leftrightarrow ((x = a \vee x = b) \vee x = c)$$
$$\leftrightarrow (x \in \{a,b\} \vee x \in \{c\})$$
$$\leftrightarrow x \in (\{a,b\} \cup \{c\}).$$

这表明,

$$\{a,b,c\} = \{a,b\} \cup \{c\}.$$

同样地,在三元集合已被定义的基础上,我们当然能够定义出四元集,并由此递推地定义出任何一个元素有限的集合.显然,尽管我们一开始对所讨论的集合都没有给出明确的定义,但讨论到此刻,集合的内涵和外延都应该说是越来越明显了.从内涵上说,我们对康托尔描述定义中集合(包括其元素)的确定性、不重复性

有了具体的理解；从外延上说，集合所指称的对象，都应该是在纯形式语言的公式基础上，在确定的范围内能以确定的集合论条件加以分析描述的对象.

下面，在并运算的性质基础上，我们证明以下两个定理：

定理 包含有一切单集的集合不存在.

证明：(反证) 假设包含有一切单集的集合存在，记为 A，那么由并集公理，$\bigcup(A)$ 应该是一个我们能够接受的合法集合. 现设 x 为任一集合，有

$$x \in \{x\} \wedge \{x\} \in A,$$

于是一定能够推出

$$x \in \bigcup(A).$$

这无疑是说，集合 $\bigcup(A)$ 能够包含任何一个集合，即集合 $\bigcup(A)$ 是一个"万有集". 这显然和我们前面已经证明的定理矛盾，故集合 A 不可能存在.

定理 集组成员并的并，等于各成员的并的并. 即

$$\bigcup(A \cup B) = (\bigcup A) \cup (\bigcup B)$$

证明：对任意给定的元素 x，有

$$\begin{aligned}
&x \in (\bigcup(A \cup B))\\
&\leftrightarrow \exists X(X \in (A \cup B) \wedge x \in X)\\
&\leftrightarrow \exists X((X \in A \vee X \in B) \wedge x \in X)\\
&\leftrightarrow \exists X((X \in A \wedge x \in X) \vee (X \in B \wedge x \in X))\\
&\leftrightarrow x \in (\bigcup(A)) \vee x \in (\bigcup(B))\\
&\leftrightarrow x \in (\bigcup(A) \cup (\bigcup(B)))
\end{aligned}$$

由外延公理，有

$$\bigcup(A \cup B) = (\bigcup A) \cup (\bigcup B).$$

最后需要指出的是，前面讨论中说到的仓库和集装箱关系的比喻，不但对于并集的理解是一种直观的方法，对于并的运算的理

解也是有益的. 在仓库中撤除一个集装箱,在并运算中就等于去掉集组某个成员最外层的一个集合符号{},而对某个集组的所有成员求并,就等于去掉该集组所有成员最外层的集合符号{}. 例如

$$\begin{aligned}&\bigcup(\{\{a,b,c\},\{b,\{c\}\},\{c,d,e\}\})\\&=\{a,b,c,b,\{c\},c,d,e\}\\&=\{a,b,c,\{c\},d,e\}.\end{aligned}$$

第四节　集合的交运算

并集公理保证由一个集合的元素的所有元素汇集成为一个集合是应该被接受的. 我们下面所讨论的，是由一个集合的元素的所有共有元素来构造一个集合是否合理的问题. 同样，为了区分不同的集合层次，我们和上一节一样地使用集组、集合和元素这些称谓.

一、交集存在定理

定理　对任意给定的集组 $M \neq \varnothing$，集合

$$A = \{x \mid \forall X(X \in M \to x \in X)\}$$

存在并且是唯一的.

证明：由于 $M \neq \varnothing$，故可以任取 M 的某个成员记为 X_0，于是，对于任意给定的元素 x，条件

$$\forall X(X \in M \to x \in X)$$

同条件

$$x \in X_0 \land (\forall X(X \in M \to x \in X))$$

显然是逻辑等值的(因为在前一条件中本身就包含有对 $x \in X_0$ 的肯定). 但后一条件却从形式上直观地告诉我们，不妨以 X_0 作为子集公理中的包容集，而以

$$C(x) = \forall X(X \in M \to x \in X)$$

作为子集公理中集合元素 x 的一个条件，那么根据子集公理，由属于集合 X_0 并满足上面条件的 x 所构造的集合当然是能够被接受的. 这就证明集合 A 的存在性.

再由外延公理，如果符合上述条件的子集还有 B，则由 B 和 A 的元素满足的是同样的条件，因此，不难说明 B 只能等于 A. 即集合 A 对于给定的条件 $C(x)$ 只能是唯一的.

实际上，由属于集组的成员 X_0 的任意性可知，实际上集组的每一个成员都能够成为上述集合 A 的包容集.

在构造上面的集合时，我们采取了一种同构造偶集完全不同的方法. 之所以如此，是因为随着我们集合论理论的不断建立和展开，我们构造集合的能力在不断地得以增强. 例如，我们在说明空集、偶集、子集等集合时，由于我们无法为这些集合找到相应的包容集，因此不得不以公理的形式来保证它们的合法性. 然而交集的情况则不同，由于我们已经建立了子集公理，而交集的包容集又是那样的明显，所以由子集公理就能推出交集的合法存在. 为了在系统中尽量减少公理的数量，在随后的讨论中，对于我们需要构造的新集合，只要在给定的条件下能够确立它的包容集，我们就不会再采用公理的方法，而一定通过子集的方式去建立定理，并给出定理的证明来说明这些新建集合的合法性.

同前面对偶集的讨论一样，出于简化，我们把交集的元素的条件更多地表示为

$$\forall X \in M(x \in X)$$

的形式，读为"x 属于集组 M 的任一成员 X".

二、交集的定义

定义　对于任意给定的集组 $M \neq \varnothing$，记

$$\bigcap(M) = \{x \mid \forall X \in M(x \in X)\}$$

为一集合，并称为集组 M 成员的交集.

对集组 M 所实施的动作 $\bigcap(M)$ 或者 $\bigcap M$，称为对集组的交运算或者求集组 M 成员的交.

在交集的定义中，应当特别注意$M \neq \varnothing$这个条件，这是因为，对空集求交是没有意义的. 从空集的定义上看，空集是没有任何元素的集合，因此，我们不能为交集找到包容集. 而从交集的定义来看，如果空集能够成为交运算的对象，即有

$$\bigcap(\varnothing)\{x \mid \forall X(X \in \varnothing \rightarrow x \in X)\}.$$

但由空集定义，$X \in \varnothing$ 总是假的，因此，条件

$$\forall X(X \in \varnothing \rightarrow x \in X)$$

对任意的元素 x 都是真的. 这表明，对任意的元素(集合)x 来说，x 都是集合 $\bigcap(\varnothing)$ 中的元素，可见，集合 $\bigcap(\varnothing)$ 是一个包含任意集合的"万有集"，而我们已经在前面的论述中证明了这是不可能的，所以，$\bigcap(\varnothing)$ 不能是一个合法的集合.

设单元集为$\{A\}$，其中，A 为任意集合，那么，

$$\bigcap(\{A\}) = A.$$

这是因为，如果$A = \varnothing$，那么，$\{\varnothing\} \neq \varnothing$，故交运算是有意义的. 由空集和交集的定义，有

$$\bigcap(\{\varnothing\}) = \{x \mid \varnothing \in \{\varnothing\} \rightarrow x \in \varnothing\}.$$

这等于说，对任意的元素 x，都有

$$x \in \bigcap(\{\varnothing\}) \rightarrow (x \in \varnothing),$$

由子集定义，有

$$\bigcap(\{\varnothing\}) \subseteq \varnothing,$$

但我们已经证明过，$\varnothing$ 是任意集合的子集，因此，由外延公理，

$$\bigcap(\{\varnothing\}) = \varnothing.$$

若 $A \neq \varnothing$，则用和上述相同的方法同样说明 $\bigcap(\{A\}) = A$. 可见，在一切可能的情况下，以集合 A 为元素的单元集的交都等于A 本身.

设偶集为$\{A, B\}$，那么，

$$\bigcap(\{A, B\}) = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

作为一种简化，我们以后把 $\bigcap(\{A, B\})$ 记为 $A \cap B$，即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \land x \in B\}.$$

并且,允许使用这种方式去记那些集组成员有限并且数量较少的集组的交集,如

$$\{a,b,c\} \cap \{b,c,d\} \cap \{c,e,f\}.$$

三、交运算的性质

我们依然以偶集成员的交运算为例,来讨论集组成员为有限时交运算的一些常见的性质,但讨论中得出的这些结果,在没有特别说明的情况下,都可以应用于集组成员多于两个但有限的集组的交运算上去.

1. 如果 M 是非空集组,那么 $\cap(M)$ 必定是集组 M 任一成员的子集.即

$$\forall X(X \in M \to \cap(M) \subseteq X).$$

由交集存在定理,性质一是显然成立的.

现在设 A,B,C 是任意的集合,那么有:

2. 交运算的交换律: $A \cap B = B \cap A$

3. 交运算的结合律: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

4. 交运算的包容律: $A \cap B \subseteq A$

$$A \cap B \subseteq B$$

$$A \cap \varnothing \subseteq \varnothing$$

5. 交运算的吸收律: $A \cap A = A$

6. 交和并的分配律:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

上述运算律中的包容律是交集存在定理的直接体现,是显然成立的.下面,我们证明性质 6 中的交对并的分配律,而把其余的证明留给读者作为练习.

证明 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

证明:对于任意给定的元素 x,都有

$$
\begin{aligned}
& x \in (A \cap (B \cup C)) \\
& \leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in (B \cup C)) \\
& \leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B \vee x \in C) \\
& \leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\
& \leftrightarrow x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C) \\
& \leftrightarrow x \in ((A \cap B) \cup (A \cap C)).
\end{aligned}
$$

所以,由外延公理有

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

第五节　集合的差运算

在本节中，我们所要考虑的是，对任意给定的两个集合 A,B，由属于集合 A 而不属于集合 B 的那些元素，汇集在一起能否构成一个合法的集合？下面最初给出的命题，对这样构成的集合的合法性是肯定的.

一、差集存在唯一性定理

定理　对任意给定的集合 A,B，集合

$$D = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B)$$

存在并且唯一.

证明：令已知的 $x \notin B$ 为元素 x 的条件，集合 D 是否存在，只需考虑能够给 x 找出一个包容集就可以了. 事实上，由于集合 D 的元素都要求是属于集合 A 的元素，因此，A 就是我们所需要找的包容集，由子集公理，这样的集合 D 是一定存在的. 并且，因为给定的条件 $x \notin B$ 的唯一性，因此，由此构造的集合 D 的唯一性是易于证明的.

二、差集的定义

定义　对任意给定的集合 A,B，记

$$A \sim B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

为一集合，称为集合 A 对 B 的差集.

例如，已知集合$\{a,b,c,d\}$，$\{c,d,e,f\}$，则

$$\{a,b,c,d\} \sim \{c,d,e,f\} = \{a,b\},$$
$$\{c,d,e,f\} \sim \{a,b,c,d\} = \{e,f\}.$$

上述的例子对理解集合之间的差运算是有帮助的.参与差运算的两个集合通常都是任意的,不需要它们之间一定具有包容或包容于或者其他什么特定的关系.因此,我们在定义中强调"… 对…"就在于集合之间的差运算是有顺序的,改变这个顺序后导致的差集一般来说是不相同的.

在集合之间所实施的动作"$\sim$",就称为集合之间的差运算.

尽管参与差运算的集合可以是任意的,但具有包容或者包容于关系的两个集合进行差运算时,却能导致一些有重要意义的结果.

定义　给定集合 A 和 A 的包容 E,则称集合 E 对集合 A 的差,即

$$E \sim A = \{x \mid x \in E \land x \notin A\}$$

为 A 在包容集 E 中的余集.

例如,由于$\{a,b\} \subseteq \{a,b,c,d\}$,所以,

$$\{a,b,c,d\} \sim \{a,b\} = \{c,d\},$$

其中,$\{c,d\}$ 就是$\{a,b\}$ 在$\{a,b,c,d\}$ 中的余集.集合 A 在集合 E 中的余集,我们记为 $\sim A$,即

$$\sim A = E \sim A.$$

余集的定义为我们提供了重要的理论依据,由此得到一条非常重要的定律,即德摩根(D. Morgan) 定律:

$$\sim (A \cup B) = (\sim A) \cap (\sim B)$$
$$\sim (A \cap B) = (\sim A) \cup (\sim B)$$

前一个公式是说,两个集合的并集在该并集的任意包容集中的余集,都等于这两个集合在该包容集中的余集的交集;而后一个公式是说,两个集合的交集在该交集的任意包容集中的余集,都等于这两个集合在该包容集中的余集的并集.

下面，我们证明德摩根定律的第一个公式，而把后一个公式留给读者作为练习.

证明:对任意给定的元素 x，都有

$$
\begin{aligned}
x \in \sim (A \cup B) &\leftrightarrow x \notin (A \cup B) \\
&\leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B \\
&\leftrightarrow x \in \sim A \wedge x \in \sim B \\
&\leftrightarrow x \in ((\sim A) \cap (\sim B)).
\end{aligned}
$$

所以，由外延公理，

$$\sim (A \cup B) = (\sim A) \cap (\sim B).$$

第六节　集合的幂运算

在集合的讨论中，人们常常需要考虑某个给定集合的全体子集的问题．这些子集的全体或者部分，能否构成合法的集合？从经验上看，这显然是不成问题的，例如，给定集合$\{a,b\}$，它的所有子集我们都可以列举出来，有$\{a\}$，$\{b\}$，$\{a,b\}$和空集$\varnothing$．显然根据前面已经建立起来的理论，这些集合的全体或者部分构造的集合都是可以接受的．但经验的认同并不等于逻辑理论上的认同，因此，在确定这些集合的合法性之前，我们首先必须确立构造集合的方式，并因此建立相应的理论，以保证用这样的方式所构造的集合在纯形式理论的系统中确实是合法的．

由于给定的集合通常是任意的，为如此给定的集合的所有子集去确定某个包容集是无法做到的，故我们采用公理的方式，从理论上保证下述集合构造的合法性．

一、幂集公理

幂集公理　对于任意给定的集合A，存在一个集合$\wp$，使得$\wp$恰好以集合A的所有子集为元素．即

$$\forall A \exists \wp \forall X(X \in \wp \leftrightarrow X \subseteq A).$$

例如，上述提到的集合$\{a,b\}$，其所有子集构成的集合为$\wp$，且

$$\wp = \{\{a\},\{b\},\{a,b\},\varnothing\}.$$

幂集公理中存在的集合$\wp$对给定的集合A来说总是唯一的．这是因为，如果还有集合S也满足上述条件，则有

$$\forall A \exists S \forall X(X \in S \leftrightarrow X \subseteq A).$$

比较集合$\wp$与 S 元素的条件,显然有

$$X \in \wp \leftrightarrow X \in S,$$

由外延公理,必然有

$$S = \wp.$$

即集合$\wp$对集合 A 来说,在给定的条件下只能是唯一的.

二、幂集的定义

定义　对任意给定的集合 A,记

$$\wp(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

为一集合,称为集合 A 的幂集.对集合 A 所实施的动作"$\wp()$",叫做求集合 A 的幂或者对 A 进行幂运算.

从幂集的定义可以看出,对给定的集合 A 和 A 的幂集合 $\wp(A)$ 来说,有

$$\forall X(X \in \wp(A) \leftrightarrow X \subseteq A).$$

这表明,幂集的定义客观上在集合的属于关系和包容关系之间建立了一种转换关系,即属于给定集合 A 的幂集的元素,必定是包容于给定集合 A 的子集,反之也成立.这为集合之间复杂关系的处理提供了较大的方便.

三、幂集的性质

幂集是一种重要的集合,特别是如上指出的,它所涉及的集合两种基本关系的转换,是其他的集合所不能代替的.这种重要的性质,在幂集的各种性质中也时有反映.

(一) 幂集的非空性:对任意给定的集合 A,$\wp(A) \neq \varnothing$.

对任意给定的集合 A,$\wp(A) \neq \varnothing$,这是十分显然的.例如,对空集 $\varnothing$ 来说,由于 $\varnothing$ 至少有一个子集即本身,因此,其幂集中也

至少有一个元素 $\varnothing$. 一般来说，任一给定的集合都至少有两个子集，故其幂集不可能是空集.

（二）包容关系的一致性：集合 A 包容于集合 B，当且仅当，$\wp(A)$ 包容于 $\wp(B)$. 即

$$(A \subseteq B) \leftrightarrow (\wp(A) \subseteq \wp(B)).$$

证明：对于任意给定的集合 X，都有

$$\begin{aligned}(A \subseteq B) &\leftrightarrow \forall X(X \subseteq A \rightarrow X \subseteq B)\\ &\leftrightarrow \forall X(X \in \wp(A) \rightarrow X \in \wp(B))\\ &\leftrightarrow (\wp(A) \subseteq \wp(B)),\end{aligned}$$

即

$$(A \subseteq B) \leftrightarrow (\wp(A) \subseteq \wp(B)).$$

（三）幂、并运算的不可交换性：对任意给定的集合 A 和 B，A，B 幂集的并真包容于 A，B 并的幂集. 即

$$((\wp(A) \cup \wp(B)) \subset \wp(A \cup B).$$

证明：设 A，B 是两个任意给定的集合，对任意的元素 X，都有

$$\begin{aligned}&X \in ((\wp(A) \cup \wp(B))\\ &\leftrightarrow (X \in \wp(A) \vee X \in \wp(B))\\ &\leftrightarrow (X \subseteq A \vee X \subseteq B)\\ &\rightarrow X \subseteq (A \cup B)\\ &\leftrightarrow X \in \wp(A \cup B),\end{aligned}$$

由子集定义，即有

$$(\wp(A) \cup \wp(B)) \subset \wp(A \cup B).$$

在上述证明演算中第 4 行出现的符号“$\rightarrow$”，是不能使用“$\leftrightarrow$”去代替的. 因为由 X 是 A 的子集或者 B 的子集推出 X 是集合 A 与 B 的并的子集，这是肯定的；但反之，由 X 是集合 A 与 B 的并的子集，去推出 X 是 A 的子集或者 B 的子集却不是必然的.

（四）幂、交运算的可交换性：对任意给定的集合 A 和 B，A，B 的幂集的交，等于 A，B 交的幂集. 即

$$(\wp(A) \cap \wp(B)) = \wp(A \cap B).$$

证明:设 A,B 是两个任意给定的集合,对任意的元素 X,都有

$$X \in (\wp(A) \cap \wp(B))$$
$$\leftrightarrow (X \in \wp(A) \wedge X \in \wp(B))$$
$$\leftrightarrow X \subseteq A \wedge X \subseteq B$$
$$\leftrightarrow X \subseteq (A \cap B)$$
$$\leftrightarrow X \in \wp(A \cap B).$$

所以,由外延公理,必定有

$$(\wp(A) \cap \wp(B)) = \wp(A \cap B).$$

(五) 并对幂的消除性:对任意给定的集合 A,其幂集的并就等于 A. 即

$$\bigcup (\wp(A)) = A.$$

证明:对任意给定的集合 A 和任意给定的元素 x,都有

$$x \in \bigcup (\wp(A))$$
$$\rightarrow x \in X \wedge X \in (\wp(A))$$
$$\rightarrow x \in X \wedge X \subseteq A$$
$$\rightarrow x \in A.$$

反之,

$$(x \in A) \wedge (A \in (\wp(A))) \rightarrow x \in \bigcup (\wp(A)),$$

这相当于说

$$(A \in (\wp(A))) \wedge (x \in A) \rightarrow x \in \bigcup (\wp(A)),$$

这又等于是说

$$(A \in (\wp(A))) \rightarrow ((x \in A) \rightarrow x \in \bigcup (\wp(A))).$$

但由幂集的定义,在一切可能的情况下,

$$(A \in (\wp(A)))$$

都是正确的,所以,必有

$$(x \in A) \rightarrow x \in \bigcup (\wp(A)).$$

综上所述,必然有

$$\bigcup(\wp(A)) = A.$$

性质(五)是对性质(三)即幂、并不可交换性的另一种形式的说明.在性质(五)中,如果我们交换求幂求并的运算顺序,那么只能得到

$$A \subseteq \wp(\bigcup(A))$$

的结果.这是因为,对任意给定的元素 x,都有

$$x \in A \rightarrow x \subseteq \bigcup(A) \leftrightarrow x \in \wp(\bigcup(A)).$$

显然,证明演算第3行中的符号"$\rightarrow$"是不能代之以符号"$\leftrightarrow$"的,因此,集合 A 只能是集合 $\bigcup(A)$ 的一个子集.

思考与练习

1. 计算：

(1) 设集合 $A=\{\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\}\}$，求

① $\bigcup(A)$ ② $\bigcap(A)$ ③ $\bigcup(\bigcap(A))$ ④ $\bigcap(\bigcup(A))$

(2) 设集合 $A=\{\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\}\}$，$a=\{1,2\}$ $b=\{2,3\}$，求 $\bigcap(\bigcup(A)\sim c)$.

(3) ① $\bigcup(\wp(\wp(\varnothing)))$ ② $\bigcap(\wp(\wp(\wp(\wp(\varnothing)))))$

2. 证明题：

(1) $A\subseteq\varnothing\leftrightarrow A=\varnothing$

(2) $A\subseteq B\wedge B\subseteq C\wedge C\subseteq A\rightarrow A=B=C$

(3) $A\subseteq B\rightarrow\bigcup(A)\subseteq\bigcup(B)$

(4) 若 A,B 非空，则 $\bigcap(A\cup B)=(\bigcap(A))\cup(\bigcap(B))$

(5) 证明以下 4 个命题够同 $A\subseteq B$ 等价：

① $A\sim B=\varnothing$ ② $A\cup B=B$ ③ $A\cap B=A$ ④ $A\cap\sim B=\varnothing$

(6) ① $(A\cap B)\cup(A\sim B)=A$

② $A\cup(B\sim A)=A\cup B$

③ $A\sim(A\cap B)=A\sim B$

④ $A\sim(A\sim B)=A\cap B$

⑤ $A\subseteq B\leftrightarrow\wp(A)\subseteq\wp(B)$

⑥ $\wp(A)\cap\wp(B)=\wp(A\cap B)$

⑦ $A\subset\wp(\bigcup(A))$，并举出不能使用“$\subseteq$”的例子

⑧ $a\in A\rightarrow\wp(a)\in\wp(\wp(\bigcup(A)))$

⑨ $\wp(A)=\wp(B)\rightarrow A=B$

⑩ 设 A 是任意集合，则 $2\in\wp(\wp(\wp(A)))$

3. 设 A,B 都是集合，举例说明：

(1) $A\neq B$，但 $\bigcup(A)=\bigcup(B)$.

(2) $a\in A$，但 $\wp(a)\notin\wp(A)$.

第四章　关系集与函数集

在本章的论述中，我们将从集合的角度，对现实中最具有一般性的关系，特别是关系中的函数进行讨论. 在这些讨论中，我们将看到在思想的抽象性方面，集合理论具有其他任何形式理论都不可能具有的魅力，集合语言也具有其他任何形式语言都不可能具有的方便简洁性. 在从关系集到函数集的整个讨论过程中，贯穿着传统逻辑中限制这一基本的思想，明确地提出这一点，会使我们在抽象的讨论中不至于轻易地迷失方向.

第一节　序偶

在上一章，我们曾定义过偶集. 由于在偶集中，对元素出现的顺序是没有特别要求的，因此，我们把偶集也称为无序集. 例如，对于集合$\{a,b\}$和集合$\{b,a\}$来说，并不因为它们的元素出现的顺序不相同而影响它们之间的相等性，它们在讨论中事实上是被作为同一个集合来处理的. 但如偶集这样的无序集，对现实或者更进一步说对各门科学的反映还不是完整的. 例如，关系是对现实中一种最为普遍存在的现象的抽象，也是各门科学所关心的重要对象，并且，在各门科学所关心的众多关系中，我们通常要考虑的是那些具有先后顺序的对象，特别是具有先后顺序的一对对象. 从集合的角

度看，这种具有先后顺序的一对对象也是一个集合，即本章首先所要讨论的重要对象 —— 序偶(a,b). 显然，在序偶(a,b)中，处于第一位置的集合 a 同处于第二位置的集合 b 应当具有完全不同的意义，否则它就同一般的偶集不会有差别. 下面，我们先用前面所建立起来的理论为序偶定义，这种定义方式是集合论中所通用的 Kuratowski 定义，是一种以特殊形式的偶集来定义序偶的方式.

一、序偶的定义

定义 对任意给定的集合 a,b，记

$$(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$$

为一集合，并称之为一序偶. 其中，我们称集合 a 为序偶(a,b)的第一坐标，而把集合 b 称为该序偶的第二坐标.

显然，使用上述方式的定义，使得集合 a 与集合 b 的地位是完全不相同的，a 在定义偶集$\{\{a\},\{a,b\}\}$中不但是成员单集的唯一元素，同时也是成员偶集的元素；而集合 b 却仅仅是定义偶集$\{\{a\},\{a,b\}\}$中成员偶集的元素. 既然如此，根据定义，序偶(b,a)的定义集就只能是$\{\{b\},\{b,a\}\}$，显然，在一般情况下，只要集合 $a \neq b$，那么，都有

$$\{\{a\},\{a,b\}\} \neq \{\{b\},\{b,a\}\},$$

当然也就会有

$$(a,b) \neq (b,a).$$

这就从定义形式上保证了在一般情况下，序偶中第一坐标和第二坐标的区别性和不可交换性.

二、序偶的确定性

序偶的定义保证了在给定的任一序偶中出现的两个元素的可

区别性，但这只是从序偶的内部构造来说的. 序偶既然是集合，那么它同样应当满足集合与集合之间的可区别性，集合本身的确定性等要求. 下面我们证明，在上述序偶的定义方式下，序偶是满足集合的所有基本要求的.

定理　任意给定的两个序偶相等，当且仅当它们的第一坐标和第二坐标都分别相相等. 即

$$((a,b)=(c,d))\leftrightarrow(a=c\wedge b=d).$$

证明：必要性：

$$(a=c\wedge b=d)\rightarrow((a,b)=(c,d)).$$

如果$(a=c\wedge b=d)$，那么由外延公理，必然有

$$(a,b)=(c,d),$$

这是显然的. 下面我们重点关心的是定理的充分性证明.

充分性：

$$((a,b)=(c,d))\rightarrow(a=c\wedge b=d).$$

如果$((a,b)=(c,d))$，那么由序偶的定义，有

$$\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\},$$

由于上式是两个无序集的相等，由外延公理，它应当有两种可能性：

1. $(\{a\}=\{c\})\wedge(\{a,b\}=\{c,d\})$;

2. $(\{a\}=\{c,d\})\wedge(\{a,b\}=\{c\})$.

对于情况 1，它又有两种可能性：

①$(\{a\}=\{c\})\wedge((\{a\}=\{c\})\wedge(\{b\}=\{d\}))$;

或者

②$(\{a\}=\{c\})\wedge((\{a\}=\{d\})\wedge(\{b\}=\{c\}))$.

但如果是情况 ①，那么显然有

$$(a=c)\wedge(b=d),$$

这正是我们所需要的结论. 而如果是情况 ②，那么由外延公理，必然得到

$$a = c = b = d,$$

则依然可以得到

$$(a = c) \wedge (b = d).$$

可见，在情况一的设定下，定理的充分性是成立的. 对于情况 ②，由偶集与单元集的关系和外延公理，显然

$$(a = c = d) \wedge (a = b = c)$$

必然成立. 再由外延公理，

$$(a = c) \wedge (b = d)$$

也肯定成立，显然，这还是我们所需要的结论. 即在情况 2 的设定下，定理的充分性还是成立的.

综上所述，在所有可能的情况下，定理都成立.

本定理的证明表明，序偶作为集合，除了在其元素的顺序上同一般的集合存在差异外，对于我们已经熟悉了的集合的一般性质，序偶也同样是满足的.

第二节　笛卡尔积

在本节的讨论中，我们需要了解并熟悉的是构造序偶的更一般的方式. 我们用如下的假设和问题来引入我们所需要讨论的内容：假如给定任意的集合 A,B，以及任意的元素 $a \in A$ 和 $b \in B$，那么，由这样的元素所构成的一切可能的序偶 (a,b)，能够构成一个合法的集合吗？从纯形式语言的角度来说，就是对任意给定的集合 A 和 B，满足条件

$$\exists a \in A \wedge \exists b \in B(x = (a,b))$$

的一切 x 能否构成一个合法的集合？事实上，既然元素 x 的条件已经以形式语言的方式给出，由子集公理，我们显然只需要为满足条件的所有 x 找出一个确定的包容集就可以了.

一、笛卡尔积存在且唯一定理

虽然我们现在还没有定义笛卡尔积，但我们以它来临时指称上述问题中提出的集合，这不影响我们对定理内容本身的证明.

定理　对于任意给定的集合 A 和 B，集合

$$D = \{x \mid \exists a \in A \wedge \exists b \in B(x = (a,b))\}$$

存在并且是唯一的.

证明：由序偶定义，有

$$(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\},$$

再由已知 $a \in A$ 并且 $b \in B$，所以有

$$\{a\} \subseteq A \subseteq A \cup B;$$

$$\{a,b\} \subseteq A \cup B.$$

所以，

$$\{a\} \in \wp(A \cup B);$$

$$\{a,b\} \in \wp(A \cup B).$$

所以，

$$\{\{a\},\{a,b\}\} \subseteq \wp(A \cup B),$$

从而有

$$\{\{a\},\{a,b\}\} \in \wp(\wp(A \cup B)).$$

由序偶定义，上式即

$$(a,b) \in \wp(\wp(A \cup B)).$$

这表明，$\wp(\wp(A \cup B)$ 就是满足条件的所有的 $x=(a,b)$ 的包容集，由子集公理，这样的一切 x 所构成的集合当然是一个合法的集合.

如果还有集合 D^*，D^* 的元素 x 也满足上述的条件，那么显然有

$$(x \in D) \leftrightarrow (\exists a \in A \land \exists b \in B(x=(a,b))),$$

也有

$$(x \in D^*) \leftrightarrow (\exists a \in A \land \exists b \in B(x=(a,b))),$$

当然有

$$(x \in D) \leftrightarrow (x \in D^*),$$

由外延公理，

$$D = D^*.$$

即集合 D 在其元素条件给定的前提下只能是唯一的.

二、笛卡尔积的定义和性质

定义 对于任意给定的集合 A 和 B，记

$$A \times B = \{x \mid \exists a \in A \land b \in B(x=(a,b))\}$$

为一集合，并称为集合 A 与 B 的笛卡尔积.

笛卡尔积引用于数学解析几何学中的笛卡尔坐标平面，而且也可以说，笛卡尔坐标平面上的点集也给出了笛卡尔积最为形象直观的解释. 在下面的讨论中，我们把笛卡尔积常常简单地记为

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

的形式.

笛卡尔积有下面一些常见的性质：

1. 对任意给定的集合 A,B，一般情况下有

$$A \times B \neq B \times A.$$

说“在一般情况下”是排除了 $A = B$ 的特殊情况. 由笛卡尔积和序偶 (a,b) 的定义来看，上式是显然的，因此在一般情况下，笛卡尔积是不可交换的.

2. 对任意给定的集合 A,B,C,D，都有

$$(A \subseteq C \wedge B \subseteq D) \rightarrow (A \times B \subseteq C \times D).$$

证明：如果有 $A \subseteq C \wedge B \subseteq D$，那么，对任意给定的元素 a,b 都有

$$(a \in A) \wedge (b \in B) \leftrightarrow (a,b) \in A \times B,$$

$$(a \in A) \wedge (b \in B) \rightarrow ((a \in C) \wedge (b \in D))$$
$$\leftrightarrow (a,b) \in C \times D,$$

这表明，

$$(a,b) \in A \times B \rightarrow (a,b) \in C \times D.$$

由子集的定义，有

$$A \times B \subseteq C \times D.$$

即

$$(A \subseteq C \wedge B \subseteq D) \rightarrow (A \times B \subseteq C \times D).$$

3. 对任意给定的集合 A,B,C，都有

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$$

证明：设 $x = (a,d)$ 为任意序偶，那么有

$x \in A \times (B \cup C)$
$\leftrightarrow (a \in A) \wedge (d \in (B \cup C))$
$\leftrightarrow (a \in A) \wedge ((d \in B) \vee (d \in C))$
$\leftrightarrow ((a \in A) \wedge (d \in B)) \vee ((a \in A) \wedge (d \in C))$
$\leftrightarrow (a,d) \in A \times B \vee (a,d) \in A \times C$
$\leftrightarrow (a,d) \in ((A \times B) \cup (A \times C))$
$\leftrightarrow x \in ((A \times B) \cup (A \times C)).$

由外延公理，即有

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$$

4. 对任意给定的集合 A,B 和空集 $\varnothing$，都有

$$A \times B = \varnothing \leftrightarrow (A = \varnothing) \vee (B = \varnothing).$$

证明：对于任意给定的序偶 x，由笛卡尔积定义，有

$$x \in A \times B \leftrightarrow \exists a \in A \wedge b \in B(x = (a,b)).$$

当 $A = \varnothing$ 或者 $B = \varnothing$ 时，上面定义式右边的公式

$$\exists a \in A \wedge \exists b \in B(x = (a,b))$$

只能有假值，所以，定义式左边的公式

$$x \in A \times B$$

也只能为假，所以其否定

$$x \notin A \times B$$

一定为真，由 x 的任意性，任何序偶都不属于笛卡尔集合 $A \times B$，即

$$A \times B = \varnothing.$$

反之，若 $A \times B = \varnothing$，表明或者 $\exists a \in A$ 为假，或者 $\exists b \in B$ 为假，此即

$$A = \varnothing \vee B = \varnothing$$

为真.

综上所述，必有

$$A \times B = \varnothing \leftrightarrow (A = \varnothing) \vee (B = \varnothing).$$

第三节　关系集

关系是人们在实践中运用最为广泛的一个概念，无论是在社会科学还是自然科学中都是如此. 现实中的各种关系，通常在形式理论中，通过集合的方式得到最为一般的抽象. 从本节开始，我们以已经建立起来的集合理论为基础，从纯集合的角度对关系作深入的分析讨论.

一、关系集定义

定义　一个以序偶为元素的集合 R 被称为一个关系集，当且仅当

$$\forall x(x \in R \rightarrow \exists a \wedge \exists b(x = (a,b))).$$

关系集我们通常简称为关系. 对关系集的定义需要强调以下几点：

首先，关系是一个使用频率极高的语词，在现实中它有无数种含义. 但集合论的讨论对象只是集合，因此，我们只是从集合的角度去考虑关系. 从这样的意义出发，关系集与前面讨论的一般集合一样，在语言上都必须满足集合论公式和集合元素的条件的要求.

其次，从定义上看，任一元素属于关系集，那么该元素一定是某个序偶，换言之，元素是序偶是该元素属于关系集的必要条件. 由此定义的关系同现实中的关系显然存在较大的差别：集合角度的关系总是二元的，而现实中二元关系只是关系中的一部分. 我们承认确实有这样的差别，但这种差别只是形式理论研究的一种需要而已. 我们都知道，在所有关系的分类中，二元关系是一种最基

本的关系，而其他的三元、四元等关系一般来说总是可以转化为二元关系来处理的. 因此，在集合论中我们重点考察的是二元关系集.

最后，上述关系集的集合定义是一个非常一般的、高度抽象的定义. 从形式上说，任何关系集的元素只需满足序偶的这一特征. 例如，

对任意给定的非空集合 A，令

$$R = \{x \mid \forall x \in A(x = (a,a))\},$$

显然，由子集公理，集合 R 必定是合法存在的，并且有

$$R \subseteq A \times A,$$

而由于 R 元素的特征是序偶，因此集合 R 就是一个关系集. 事实上，在上述设定的条件下，R 是建立在非空集合 A 中的一个“等于”关系. 而

$$D = \{(B,C) \mid B,C \subseteq A \land \forall x(x \in B \rightarrow x \in C)\}$$

由子集公理，集合 D 也是存在的，并且有

$$D \subseteq \wp(A) \times \wp(A).$$

事实上，D 是我们建立在非空集合 A 的子集之间的一个“包容于”关系，属于集合 D 的每一个元素的第一坐标，都是第二坐标的一个子集. 再如，令集合

$$A = \{1,2,3\},$$

构造集合

$$R = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}.$$

显然，集合 R 是集合 A 的笛卡尔积的一个子集，并且，这个子集 R 表达的是集合 A 中的一个“小于”关系.

二、关系集的定义域和值域

对于一个任意给定的关系集 R，由上述定义，我们当然是给定

了一个以序偶为元素的集合. 下面我们证明，对任意的(x,y)，令条件

$$C(x)=\exists y((x,y)\in R).$$

$$C(y)=\exists x((x,y)\in R).$$

那么，满足条件 $C(x)$ 和 $C(y)$ 的一切 x 和 y 也分别构成唯一的合法集合.

定理 对于任意给定的关系集 R，以下集合分别存在且唯一：

$$A=\{x\mid \exists y((x,y)\in R)\},$$

$$B=\{y\mid \exists x((x,y)\in R)\}.$$

证明：我们先证明集合 A 与 B 的存在性. 由子集公理，显然只需要分别为集合 A 和 B 找出某个包容就可以了. 因为

$$C(x)=\exists y((x,y)\in R)$$

和

$$C(y)=\exists x((x,y)\in R),$$

则它们可以分别成为集合 A 与 B 中的元素的条件.

事实上，如果 $(x,y)\in R$，那么由序偶的定义，有

$$\{\{x\},\{x,y\}\}\in R.$$

既然$\{\{x\},\{x,y\}\}$是集合 R 的成员，那么由并集公理，成员的元素$\{x\}$ 和$\{x,y\}$ 就都应该是 $\bigcup(R)$ 的成员. 我们把求并的做法再实施给并集 $\bigcup(R)$，则可以肯定，必然有

$$x\in\bigcup(\bigcup(R))\wedge y\in\bigcup(\bigcup(R)).$$

这无疑地表明，集合 $\bigcup(\bigcup(R))$ 既可以是集合 A 的包容集，又可以是集合 B 的包容集，因此，由子集公理，如上构造的集合 A，B 都可以合法地存在.

A，B 集合对给定条件的唯一性是显然的. 因为在上述给定的条件下，若还有其他集合存在，由条件的确定性和外延公理，我们总能证明，它们都不过是上述集合 A，B 的另一称谓而已.

上述定理证明中一个重要的前提是:R 必须是一个关系集,否则就不能保证 $\bigcup(\bigcup(R))$ 等是集合,当然就不能保证包容集的存在.

定义 对任意给定的关系集 R,记

$$\mathrm{dom}(R) = \{x \mid \exists y((x,y) \in R)\}$$

为一集合,称为关系集 R 的定义域;记

$$\mathrm{ran}(R) = \{y \mid \exists x((x,y) \in R)\}$$

为一集合,称为关系集 R 的值域.

特别地,如果 $R = A \times B$,并且集合 A,B 都不是空集,那么有

$$\mathrm{dom}(R) = A,$$

$$\mathrm{ran}(R) = B.$$

并且,如果 $R = A \times A$,那么,当 $A \neq \varnothing$ 时,有

$$\mathrm{dom}(R) = \mathrm{ran}(R) = A.$$

而当 $A = \varnothing$ 时,

$$\mathrm{dom}(R) = \mathrm{ran}(R) = \varnothing.$$

但更为一般的情况是,当 R 是建立在笛卡尔积 $A \times B$ 中的某个关系,并且仅有 $R \subseteq A \times B$ 时,那么有

$$\mathrm{dom}(R) \subseteq A,$$

$$\mathrm{ran}(R) \subseteq B.$$

而如果 R 是建立在笛卡尔积 $A \times A$ 中的某个关系,并且仅有 $R \subseteq A \times A$ 时,那么有

$$\mathrm{dom}(R) \subseteq A,$$

$$\mathrm{ran}(R) \subseteq A.$$

例 1 以 Z^+ 记正数集合,在 Z^+ 中建立关系 R 如下:

$$R = \{(m,n) \in Z^+ \times Z^+ \mid \exists j \in Z^+ (m = n + j)\}.$$

显然,R 是建立在 Z^+ 中的一个"大于"关系,或者说,R 是包容于 $Z^+ \times Z^+$ 中的一个反映大于关系的子集,当且仅当存在正整数 j,使得 $m = n + j$ 时,$(m,n) \in R$. 其中,

$$\mathrm{dom}(R) = Z^+ \sim \{1\} \subseteq Z^+$$
$$\mathrm{ran}(R) = Z^+.$$

我们通常用符号“$>$”表示大于关系，如果$(m,n) \in R$，R如上所定义，那么就记为：

$$m > n.$$

例 2 以Z记整数集合，在Z中建立关系R如下：

$$R = \{(m,n) \in Z \times Z \mid \exists j \in Z(m - n = 5j)\}.$$

显然，如上建立的关系，是“整数集合中两数之差能被 5 整除”的关系，当且仅当存在整数j，使得$m - n = 5j$时，那么$(m,n) \in R$. 其中，

$$\mathrm{dom}(R) = \mathrm{ran}(R) = Z.$$

以上，我们从集合的角度讨论了关系. 无论如何，从定义的角度看，这种讨论是非常一般化的讨论. 我们现在所得到的直观的理解就是，不管怎样的序偶，只要它们的全体能合理地构成集合，那么这个集合就是一个关系. 一个关系集全部元素的第一坐标和第二坐标分别构成该关系的定义域和值域. 在几何直角坐标平面上，我们可以得到定义域和值域在横轴与纵轴上的投影，通常我们把它们分别称为第一坐标投影和第二坐标投影.

第四节　等价关系集

在讨论等价关系前，我们先来回顾一下人们最为熟悉的等于关系. 在任何论域中，等于关系通常都一定会具备以下三个性质，即对任意的 x,y,z（它们不一定是集合），都有

1. $x = x$

2. $x = y \to y = x$

3. $x = y \wedge y = z \to x = z$

我们把以上三条性质分别称为等于关系的自返性，对称性和传递性. 当然，由上述 x 的任意性以及我们已经建立起来的集合理论，这些性质对于集合来说显然也是成立的. 以下在集合论中讨论的等价关系，是对等于关系的上述三个性质的进一步推广.

一、等价关系集的定义

定义　集合 X 中的一个关系集 R 称为是一个等价关系集，当且仅当对任意的 $x,y,z \in X$，都满足：

1. 自返性：xRx

2. 对称性：$xRy \to yRx$

3. 传递性：$xRy \wedge yRz \to xRz$

例如，上述的等于关系，在任意给定的集合 X 中都可以构成一个等价关系集，这是显然的.

又如，我们在整数集 Z 中建立的“两数之差能被 5 整除”的关系集 R，同样是一个等价关系集. 这是因为：

首先，

$$\forall m \in Z((m,m) \in R);$$

其次,

$$\forall m,n \in Z((m,n) \in R \to (n,m) \in R);$$

最后,

$$\forall m,n,o \in Z((m,n) \in R \land (n,o) \in R \to (m,o) \in R).$$

前两个公式的真,对于R的定义来说是明显的,第三个公式的真证明如下:对任意给定的$m,n,o \in Z$,如果存在$j,k \in Z$,有

$$m - n = 5j,$$

$$n - o = 5k,$$

那么,就有

$$(m - n) + (n - o) = 5j + 5k,$$

有

$$m - o = 5(j + k),$$

显然,整数j,k之和还是整数.这表明m与o之差依然能被5整除,所以,“两数之差能被5整除”的关系同样满足传递性,即第三个公式的真在设定的条件下也成立.所以,在Z中建立的“两数之差能被5整除”的关系集R,同样是一个等价关系集.而在Z中建立的“大于”或“小于”这些关系集,由于任一整数在这些关系中都不能满足自返性,故它们都不能是Z中的等价关系.

当R为某集合中的等价关系集并且有xRy时,我们通常称x等价于y.但既然等价关系都具有对称性,因此,也不妨称x和y是相互等价的.

在前面讨论集合X中的某个关系集R时,我们曾经指出最一般的情况是,R仅仅是集合$X \times X$中的一个子集,即有

$$R \subseteq X \times X.$$

但当R仅仅是集合$X \times X$中的一个子集时,一般来说,$\mathrm{dom}(R)$和$\mathrm{ran}(R)$也只能分别是集合X的子集,有

$$\mathrm{dom}(R) \subseteq X,$$
$$\mathrm{ran}(R) \subseteq X.$$

上述关系表明，对于建立在集 X 中的一般关系集 R，$\mathrm{dom}(R)$ 和 $\mathrm{ran}(R)$ 的元素都不需要必然地充满 X，它们都只需满足是 X 的一个子集就足够了. 但是当 R 是建立在 X 中的一个等价关系集时，由等价关系的自返性，$\mathrm{dom}(R)$ 和 $\mathrm{ran}(R)$ 的元素都会必然地充满 X，即有

$$\mathrm{dom}(R) = \mathrm{ran}(R) = X.$$

对于任意给定的集合 X 来说，等价关系集的定义域和值域的这一特点，决定了集 X 中的任意等价关系集都包容有等于关系集，换言之，X 中的等于关系集一定是 X 中任一等价关系集的一个子集. 因此，我们通常把等于关系集称为最小的等价关系集，即在集合 X 中构造的任一等价关系集 R，对任意的 $x \in X$，都有

$$(x,x) \in \text{“}=\text{”} \rightarrow (x,x) \in R.$$

同时，我们也把集合 $X \times X$ 称为是建立在 X 中的最大等价关系集，因为，对建立在 X 中的任一等价关系集 R 来说，都一定有

$$R \subseteq X \times X.$$

二、等价类

定义　任意给定集合 X，并给定集合 X 中的某个等价关系 R，那么，对任一 $x \in X$，把 X 中一切与 x 等价的元素 y 所组成的 X 的子集，称为 x 的 R 等价类，记为 $[x]_R$，即

$$[x]_R = \{y \mid y \in X \wedge xRy\}.$$

例如，如果 R 是建立在整数集合中的等于关系，那么对任一 $m \in Z$，

$$[m]_R = \{m\}.$$

如果 R 是建立在整数集合中的“两数之差能被 5 整除”的关

系，那么对任一 $m \in Z$，有

$$[m]_R = \{n \mid n,j \in Z \wedge m-n=5j\}.$$

对于等价关系 R 的 R 等价类，我们有以下的定理：

定理 任意给定集合 X，并给定集合 X 中的某个等价关系 R，则对任意元素 $x,y \in X$ 都有

$$[x]_R = [y]_R \leftrightarrow xRy.$$

证明：先证明充分性.

如果 $[x]_R = [y]_R$，那么由等价关系的自返性，有 $y \in [y]_R$，再由已知和外延公理，必定有 $y \in [x]_R$，由等价类定义，即有 xRy. 充分性得证.

再证明必要性.

如果 xRy，则对任一 $z \in X$，若 $z \in [y]_R$，那么 yRz. 但等价关系都具有传递性，所以必定有 xRz，即 $z \in [x]_R$. 另一方面，如果对任一 $z \in X$，若 $z \in [x]_R$，那么 xRz，但等价关系都具有对称性，所以由已知有 yRx，再由等价关系的传递性，必然有 yRz，即 $z \in [y]_R$. 由上述证明，显然对任一 $z \in X$，都有

$$z \in [x]_R \leftrightarrow z \in [y]_R,$$

由外延公理，有

$$[x]_R = [y]_R.$$

综上所述，

$$[x]_R = [y]_R \leftrightarrow xRy.$$

推论 任意给定集合 X 并给定集合 X 中的某个等价关系 R，则对任意元素 $x,y \in X$ 都有

$$x,y\text{ 属于同一等价类} \leftrightarrow xRy.$$

由已证定理和集合的相等，推论的真实性是不言而喻的.

三、集合元素的分类

分类是逻辑划分中的一种重要的划分. 而逻辑划分是科学研

究中的一种重要的方法.从集合的角度看,人们在众多的场合,都需要对某个给定的集合进行划分或者分类,以进一步去分析集合元素之间的关系,或者集合的子集之间的关系.分类与划分在逻辑讨论中是有区别的,但在集合论的讨论中我们把它们统一地称为分类,从下述讨论中为分类所建立的条件来看,这样的统一并无不当之处.

定义 任意给定集合 X,由 X 的非空子集构成的集组 $\mathfrak{R}$ 称为 X 的一个分类,当且仅当 $\mathfrak{R}$ 满足条件

1. $\bigcup(\mathfrak{R}) = X$;

2. $\forall A, B \in \mathfrak{R}(A \neq B \rightarrow A \cap B = \varnothing)$.

上述定义中的两个条件,完整地概括了逻辑中关于划分所应遵守的规则.其中,条件 1 所要求的,是分类必须是相称的,使得集合 X 的元素在分类中不多出,也无遗漏;而条件 2 则要求,X 的任何一个分类其子集之间都应当是不相容的,即任意两个子集,对一个正确的分类来说,子集中都不会有相同的元素.

集合 X 的分类(是由集合 X 的子集构成的一个集合,比较 $\mathfrak{R}$ 与 X 的幂集 $\wp(X)$,易知有

$$\mathfrak{R} \subset \wp(X).$$

任何分类都需要选取一定的标准,从集合的角度说,都要选取一定的关系.关系中的等价关系,为准确无误地进行分类提供了可靠的保证.我们证明下面的定理来说明这一点.

定理 对任意给定的集合 X 和建立在 X 中的某个等价关系 R,X 的所有 R 等价类的集合

$$\aleph = \{[x]_R \mid x \in X\}$$

是 X 的一个分类.

我们只需要证明,在给定的条件下,集合 $\aleph$ 满足分类的两个条件即可.

证明:对于条件 1,由等价类的定义,$\bigcup(\aleph) \subseteq X$ 是显然的.

我们需要说明的是$X \subseteq \bigcup(\aleph)$.对任一$x \in X$,由等价关系的自返性,必定有

$$x \in [x]_R,$$

但由已知,

$$[x]_R \in \aleph,$$

所以有

$$x \in \bigcup(\aleph),$$

这表明

$$x \in X \rightarrow x \in \bigcup(\aleph),$$

即

$$X \subseteq \bigcup(\aleph),$$

所以,由外延公理,有

$$\bigcup(\aleph) = X.$$

即$\aleph$满足分类的条件1.

对于条件2,设$[x]_R$和$[y]_R$是$\aleph$中的任意两个不同的成员但$[x]_R \cap [y]_R \neq \varnothing$,这意味着,存在元素$z \in X$,使得

$$xRz \wedge yRz.$$

由等价关系的对称性,显然有

$$xRz \wedge zRy.$$

再由等价关系的传递性,显然有xRy,即有

$$[x]_R = [y]_R,$$

这同所设显然是矛盾的,故$[x]_R \cap [y]_R = \varnothing$,这表明$\aleph$是满足条件2的.

综上所述,定理成立.

把以上连续证明的两个定理所断定的内容概括起来,它们实际上断定了在任一集合X中建立一个等价关系,也就给出了集合X的一个分类,使得每一类中的元素都是互相等价的,并且,集合X中互相等价的元素都必然地汇集在同一个类中.

我们以后把集合 X 的 R 分类集 $\aleph$ 称为集合 X 的 R－商集，记为 X/R，即

$$X/R = \{[x]_R \mid x \in X\}.$$

例　在整数集合 Z 中建立的关系“两数之差能被 5 整除”，它实际上把 Z 集分为了具有 5 个元素的一个集合 Z 的 R－商集，即

$$Z/R = \{[0]_R, [1]_R, [2]_R, [3]_R, [4]_R\}.$$

第五节　关系集的逆集与复合集

从纯形式语言表述的角度来看，关系给人的第一个直观印象就是对应，而这种对应总是要求建立在集合论条件的基础之上.例如，在集合 X 中建立的子集之间的包容关系 R，它所要求的条件从集合论条件的角度看，就是

$$A,B \subseteq X \wedge \forall x(x \in B \to x \in A),$$

我们在集合 X 的所有可能的子集中进行选择，把那些满足上述条件的两个子集选择出来并将它们有序地构成序偶 (A,B)，那么，这些所有的满足条件的序偶所构成的集合

$$R = \{(A,B)\} \mid A,B \subseteq X \wedge \forall x(x \in B \to x \in A)\},$$

就表达了集合 X 中子集之间的包容关系.

现在的问题是，既然从纯形式语言表述的角度来看，关系集给人的第一个直观印象就是序偶的集合，那么，如果我们在给定的条件基础上，交换关系集 R 的所有元素中第一坐标和第二坐标的位置，那么所得到的是否还是一个关系集？它同原来的关系集 R 应当具有怎样的关系？特别是，在同一个给定的条件下，它是否依然是对原事物本来面目的一种正确的反映？

其实，对上述问题的回答都是肯定的.这是因为我们关于关系集的定义，从集合的角度来说本来就是非常简单和一般的：在某个给定的集合论条件的前提下，它是集合并且集合的元素是序偶就可以了，当我们改变序偶中元素的顺序时，并没有改变条件在集合论中的合法性，因此，也不可能影响新的集合在原本给定条件下的合法性.所以，改变序偶顺序所得到的关系尽管不同于原来的关

系，但可以认为，它同样是在集合之间建立起来的原本关系的另一种正确的表达方式. 如上例，设交换序偶坐标顺序后的关系为 S，则

$$S = \{(B,A)\} \mid A,B \subseteq X \wedge \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)\}.$$

显然，如果原来的 R 表达的是子集之间的包容关系，那么 S 表达的就是子集之间的包容于关系，它们是对同一事物的完全正确的不同表达方式而已.

对同一事物的完全正确的不同表达方式在实践和理论中都是具有普遍性的. 如，令

$$A = \{1,2,3\}$$

那么，令

$$R = \{(1,2),(1,3),(2,3)\},$$

显然，R 是在集合 A 中建立的一个“小于”关系. 现在，仅仅交换 R 的元素中坐标的顺序，得到集合 S，即

$$S = \{(2,1),(3,1),(3,2)\},$$

那么，S 显然是建立在同一集合 A 中的“大于”关系，它们明显地是对同一事物完全正确的不同反映方式罢了.

二、关系集的逆集的定义

定义　对于任意给定的关系集 R，记

$$R^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in R\}$$

为一集合，称为关系集 R 的逆集. 在下述的讨论中，我们把关系集的逆集简称为关系的逆.

关系的逆是在肯定关系集的基础上定义的，因此有

$$yR^{-1}x \leftrightarrow xRy,$$

即，y 对 x 满足关系 R^{-1}，当且仅当 x 对 y 满足关系 R. 并且，由于

R^{-1} 依然是关系，所以由关系逆的定义有

$$\mathrm{dom}(R^{-1}) = \mathrm{ran}(R),$$

$$\mathrm{ran}(R^{-1}) = \mathrm{dom}(R).$$

从关系逆的定义来看，关系及其逆有下面的基本关系：

定理 对于任意给定的关系 R，都有

$$(R^{-1})^{-1} = R.$$

证明：我们现在能依赖的，始终只能是关系及其逆的定义，即对任意给定的关系 R 和序偶 (x,y)，都有

$$(x,y) \in R \leftrightarrow (y,x) \in R^{-1} \leftrightarrow (x,y) \in (R^{-1})^{-1}.$$

由外延公理，有

$$(R^{-1})^{-1} = R.$$

二、关系集的复合集定义

定义 对于任意给定的关系 R 和 S，记

$$S \cdot R = \{(x,z) \mid \exists y((x,y) \in R \wedge (y,z) \in S)\}$$

为一集合，称为 R 对 S 的复合集. 其中的符号"•"表示在关系集之间求复合集运算的算子.

在上述定义中，我们特别强调了两个集合的顺序，显然有

$$R \cdot S = \{(x,z) \mid \exists y((x,y) \in S \wedge (y,z) \in R)\}.$$

例如，令 $R = \{(1,2),(1,3)\}$，$S = \{(1,4),(2,5)\}$，那么，有

$$S \cdot R = \{(1,5)\},$$

$$R \cdot S = \varnothing,$$

$$S \cdot R^{-1} = \{(2,4),(3,4)\},$$

$$R \cdot S^{-1} = \{(4,2),(4,3)\},$$

$$R^{-1} \cdot S = \varnothing,$$

$$S^{-1} \cdot R = \varnothing,$$

$$S^{-1}\cdot R^{-1}=\varnothing,$$

$$R^{-1}\cdot S^{-1}=\{(5,1)\}$$

等，由定义和上述例子可以看出，

$$(x,z)\in S\cdot R\leftrightarrow \exists y(xRy\wedge ySz),$$

$$(x,z)\in R\cdot S\leftrightarrow \exists y(xSy\wedge yRz).$$

这些都表明，关系的复合过程作为一种运算，一般情况下是不满足交换律的.

三、关系复合与逆的运算性质

定理 对于任意给定的关系 R,S,T，都有

$$T\cdot(S\cdot R)=(T\cdot S)\cdot R.$$

证明：对于任意给定的 (x,u)，如果都有

$$\begin{aligned}
&(x,u)\in T\cdot(S\cdot R)\\
&\quad\leftrightarrow \exists z((x,z)\in(S\cdot R)\wedge(z,u)\in T)\\
&\quad\leftrightarrow \exists z(\exists y((x,y)\in R\wedge(y,z)\in S)\wedge(z,u)\in T)\\
&\quad\leftrightarrow \exists z\exists y((x,y)\in R\wedge(y,z)\in S\wedge(z,u)\in T)\\
&\quad\leftrightarrow \exists y((x,y)\in R\wedge\exists z((y,z)\in S\wedge(z,u)\in T))\\
&\quad\leftrightarrow \exists y((x,y)\in R\wedge(y,u)\in(T\cdot S))\\
&\quad\leftrightarrow (x,u)\in((T\cdot S)\cdot R)
\end{aligned}$$

由外延公理，

$$T\cdot(S\cdot R)=(T\cdot S)\cdot R.$$

上述定理的证明，表明求复合集的过程即算子“·”是满足结合律的.

定理 对任意给定的关系 R,S，

$$(S\cdot R)^{-1}=R^{-1}\cdot S^{-1}.$$

证明：对于任意给定的 (x,z)，如果都有

$$
\begin{aligned}
(x,z) \in (S \cdot R)^{-1} & \\
&\leftrightarrow (z,x) \in (S \cdot R) \\
&\leftrightarrow \exists y((z,y) \in R \wedge (y,x) \in S) \\
&\leftrightarrow \exists y((y,z) \in R^{-1} \wedge (x,y) \in S^{-1}) \\
&\leftrightarrow \exists y((x,y) \in S^{-1} \wedge (y,z) \in R^{-1}) \\
&\leftrightarrow (x,z) \in (R^{-1} \cdot S^{-1}),
\end{aligned}
$$

由外延公理,有

$$(S \cdot R)^{-1} = R^{-1} \cdot S^{-1}.$$

第六节　函数集

如前所述，以上给出的关系集，条件是非常一般的：只要其元素是序偶就行了，而并不考虑元素在第一坐标同第二坐标之间的对应关系．例如，在上节所设的集合 A 中，(1,2)，(1,3)，(2,3) 都是 A 的元素，对应同一个第一坐标"1"的，既有"2"，也有"3"；反之，对应同一个第二坐标"3"的，有"2"也有"1"．下面，我们通过对关系的限制，来讨论一类特殊的关系集．

一、函数集的定义

定义　一个关系集 F 被称为一个函数集，当且仅当，对任意给定的元素 x，使 $(x,y)\in F$ 的元素 y 总是唯一的．即

$$\forall x\forall y\forall z((x,y)\in F\wedge(x,z)\in F\rightarrow y=z).$$

函数集的这个定义对具有数学函数经历的人来说并不是陌生的．尽管，定义中 y 与 x 的对应关系在方式上是有歧义的：如可以是一个唯一存在的 y，对应任意的每一个 x，也可以是对每一个任意的 x，都存在某个唯一的 y．但定义所强调的元素的第二坐标对同一个第一坐标的唯一确定性却是不变的．我们常常把函数集简称为函数．

当序偶 $(x,y)\in F$，其中 F 是函数集时，我们记

$$y=F(x)$$

或者

$$x\vdash^{F}y,$$

称 $F(x)$ 是函数 F 在 x 的值，或者说在函数 F 的作用下，与 x 对应

的只有 y. 由于在集合论中,序偶的坐标实际上还是集合,因此函数本质上反映的依然是集合与集合之间的对应关系,所以,我们通常也用映射、变换等来称呼函数,并记以

$$F: X \to Y$$

的形式,表示函数 F 是由集合 X 到集合 Y 的映射或者变换或者函数等. 但无论怎样称呼,我们都不应当忘记,我们所讨论的,x,y,F 等都是作为我们讨论的对象集合而出现的. 在继续介绍新的内容之前,先来熟悉下面这些以后常见的提法是必要的.

例 1 对任意给定的集合 X,在 X 中建立如下的关系 $I_x: X \to X$,定义 I_x 为,对任意的 $x \in X$,都有

$$I_x(x) = x,$$

由集合元素的性质,有 $(x,x) \in I_x$,并且 I_x 显然是 X 中的一个函数关系,有

$$\mathrm{dom}(I_x) = X,$$

并且

$$\mathrm{ran}(I_x) = X.$$

I_x 其实就是定义在集合 X 中的等于关系,我们以后把这样的 I_x,称为定义在集合 X 上的一个恒等函数.

例 2 对任意给定的集合 X 和 Y,记

$$\rho_1: X \times Y \to X,$$

$$\rho_2: X \times Y \to Y.$$

现在定义,对任意的 $(x,y) \in X \times Y$,都有

$$\rho_1(x,y) = x,$$

$$\rho_2(x,y) = y.$$

显然,由集合的性质和上述定义,ρ_1 和 ρ_2 都是函数. 我们把这样定义的函数 ρ_1,ρ_2 分别称为从 $X \times Y$ 到 X 和从 $X \times Y$ 到 Y 的投影函数,其中,

$$\mathrm{dom}(\rho_1) = \mathrm{dom}(\rho_2) = X \times Y,$$
$$\mathrm{ran}(\rho_1) = X,$$
$$\mathrm{ran}(\rho_2) = Y.$$

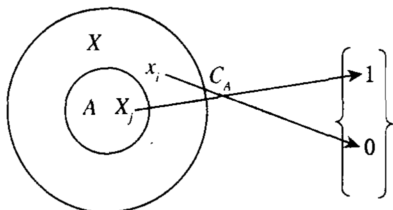
例 3　对任意给定的集合 X 和 X 的任意子集 A，记

$$C_A : X \to \{0,1\}.$$

定义对任意的 $x \in X$，都有

$$C_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

以上述方式定义的关系 C_A 依然是一个函数关系. 我们把这样的函数称为定义在集合 X 上的关于子集 A 的特征函数. 特征函数可一般图示为：



不难说明，其中，

$$\mathrm{dom}(C_A) = X,$$
$$\mathrm{ran}(C_A) = \{0,1\}.$$

例 4　对任意给定的集合 X，设 R 是建立在 X 中的一等价关系，记

$$\varphi: X \to X/R,$$

定义
$$\varphi(x) = [x]_R,$$

此时，称 φ 是由集合 X 到其 R — 商集 X/R 的自然映射(或者标准映射)，由函数的定义不难验证，φ 是一个函数. 其中，

$$\mathrm{dom}(\varphi) = X,$$
$$\mathrm{ran}(\varphi) = X/R.$$

如，当 X 为整数集时，令

$$R = \{(m,n) \in X \times X \mid \exists j \in X(m-n=5j)\}.$$

则 $X/R = \{[0]_R,[1]_R,[2]_R,[3]_R,[4]_R\}$.

显然，当两数之差为 0,5,10,15,－5,－10,－15 等时，都有

$$\varphi(0) = \varphi(5) = \varphi(10) = \varphi(-5) = \varphi(-10) = \cdots = [0]_R;$$

而当两数之差为 1,6,11,16 时，都有

$$\varphi(1) = \varphi(6) = \varphi(11) = \cdots = [1]_R.$$

例 5　对任意给定的集合 X 和在 X 中建立的任意的函数 F，记

$$F: X \times X \to X,$$

我们把对 F 的每一个具体并满足函数性质的定义都称为是集合 X 中的一个运算. 例如，当 X 为实数集时，实数集中定义的“＋”，“－”，“×”等都是这样的运算，此时有

$$\mathrm{dom}(F) = X \times X,$$
$$\mathrm{ran}(F) = X.$$

熟悉以上函数集的表达方式后，我们来继续讨论新的内容.

定理　对于任意给定的集合 X 和 $Y(X \neq \varnothing, Y \neq \varnothing)$，记

$$F: X \to Y,$$

即 F 是建立在由 X 到 Y 的一个任意的函数，那么，所有这样的 F 构成一个集合.

证明：因为已知 F 是函数，所以 F 的元素所满足的条件可以认为是由函数的定义已经给定了的. 既然如此，由子集公理，我们只需为 F 找出一个包容集就可以了. 由函数的定义域和值域的定义，显然有

$$\mathrm{dom}(F) \subseteq X,$$
$$\mathrm{ran}(F) \subseteq Y.$$

于是，对任意的 $x \in X, y \in Y$ 都有

$$x \in \mathrm{dom}(F),$$
$$y \in \mathrm{ran}(F),$$

从而有

$$(x,y) \in F \to (x,y) \in \mathrm{dom}(F) \times \mathrm{ran}(F)$$
$$\subseteq X \times Y,$$

即

$$F \subseteq X \times Y,$$

从而有

$$F \in \wp(X \times Y).$$

即$\wp(X \times Y)$就是我们所需要的一个包容集. 由子集公理,这样的所有 F 构成的集合是一个合法的集合.

以下,我们用 Y^X 记从 X 到 Y 的所有函数的集合. 作为对这个抽象符号的具体化,我们来考察下述一些较为特殊的情况.

例 1 $Y^{\varnothing} = \{\varnothing\}$.

由上述定义,$X = \varnothing$,$Y^{\varnothing}$ 表示由空集 $\varnothing$ 到任意集合 Y 的一切函数的集合,而这个集合只有唯一的元素即 $\varnothing$.

证明:假如由空集 $\varnothing$ 到任意集合 Y 的一切函数的集合中还有其他的非空元素,设为 F,即

$$F: \varnothing \to Y,$$

则存在$(x,y) \in F$,由函数定义,当然就有

$$x \in \mathrm{dom}(F),$$

这表明,有

$$\mathrm{dom}(F) \subseteq \varnothing \ \wedge\ \mathrm{dom}(F) \neq \varnothing$$

一定为真,这明显是一个逻辑矛盾,所以假设不可能成立,即 F 必定也只能是空集.

另一方面,如果 $F = \varnothing$,那么首先 F 必然是关系,且

$$\mathrm{dom}(F) = \varnothing,$$

并且

$$\mathrm{ran}(F) = \varnothing \subseteq Y;$$

其次，如果 $F=\varnothing$，那么 $\varnothing$ 一定是函数，这是因为，对于任意的 x，y，z 都有

$$(x,y)\in\varnothing \wedge (x,z)\in\varnothing$$

必定是假的，因此，

$$\forall x\forall y\forall z((x,y)\in\varnothing \wedge (x,z)\in\varnothing\rightarrow y=z)$$

一定为真，故 $\varnothing$ 一定是函数.

综上所述，一定有

$$Y^{\varnothing}=\{\varnothing\}.$$

特别地，由 Y 集的任意性，当 $Y=\varnothing$ 时. 必然有

$$\varnothing^{\varnothing}=\{\varnothing\}.$$

例 2　如果 $X\neq\varnothing$，而 $Y=\varnothing$，那么有

$$\varnothing^{X}=\varnothing.$$

即从任意非空集合 X 到空集合 $\varnothing$ 的映射不存在.

证明：若 X 非空，并且存在映射 F，使得

$$F:X\rightarrow\varnothing,$$

那么，一定存在 $x\in\mathrm{dom}(F)$，按关系定义域的定义，是因为存在 $y\in\mathrm{ran}(F)=\varnothing$，使得 $(x,y)\in F$，这与空集公理显然是矛盾的，故映射 F 必然不存在.

最后要指出的是，尽管我们在上面的讨论中多次使用“所有的 F”、“一切 F”等，但我们都是对给定的集合 X 和 Y 而言的，我们也因此总是能为我们所要构造的集合找到相应的包容集. 但如果离开了存在包容集这个条件，那么构造出来的集合就不一定是合法的了.

二、单叶函数集

下面，我们对上述讨论过的函数集再加以适当的限制，从而去

讨论函数集中一些更为特殊的集合.

定义 对任意给定的函数集F,当且仅当,对任意的y都有使$(x,y) \in F$的x也是唯一的,即对函数集F总有

$$\forall x \forall y \forall z((x,y) \in F \wedge (z,y) \in F \rightarrow x = z)$$

成立,则称函数F是单叶函数集.单叶函数集在后面的讨论中简称单叶函数.

单叶函数所反映的对应关系,不但要求对任意的$x \in \mathrm{dom}(F)$,y应当是唯一确定的,同时要求对任意的$y \in \mathrm{ran}(F)$,x也应当是唯一确定的.这相当于说,对任意的$x \in \mathrm{dom}(F) \subseteq X$和对任意的$y \in \mathrm{ran}(F) \subseteq Y$,不但要求由$X$中的$\mathrm{dom}(F)$到$Y$中的$\mathrm{ran}(F)$的对应应满足函数的要求,具有函数的特征,同时由$\mathrm{ran}(F)$到$\mathrm{dom}(F)$的对应也需要满足函数的要求并且具有函数的特征.例如,上述讨论过的恒等函数I_x,就是一个建立在集合X中的单叶函数,而特征函数C_A,一般来说就不能是从集合X到集合$\{0,1\}$的单叶函数.

映射$F:X \rightarrow Y$在我们前面的讨论中,通常只需要满足$\mathrm{dom}(F) = X$, $\mathrm{ran}(F) \subseteq Y$就可以了,而不需要$\mathrm{ran}(F) = Y$,我们称之为$\mathrm{ran}(F)$不需要充满$Y$.单叶函数的定义虽然也包括了$F: X \rightarrow Y$的一般情况,但在定义中我们并没有特别地说明$F$是由$X$集到哪个特定集合的函数,而这一点对单叶函数来说显然是重要的.因此,我们在下面的讨论中首先来说明这一问题.

定义 对于函数(或映射)$F:X \rightarrow Y$,当且仅当

$$\mathrm{ran}(F) = Y$$

时,称F是从X到Y上的函数(映射),或者说映射$F:X \rightarrow Y$此时是满占的.

例如,对任意给定的集合X,在X中建立映射$I_x: X \rightarrow X$,定义

$$I_x(x) = x,$$

显然,函数 I_x 是从 X 到 Y 上的满占的函数.

再如在实数集 **R** 中建立的函数

$$F(x) = x^3,$$

因为有 $\mathrm{ran}(F) = \mathbf{R}$,故 $F(x)$ 也是由实数集 **R** 到 **R** 上的满占函数.

满占函数所表达的,是在映射 $F:X\rightarrow Y$ 中,Y 恰好是由函数 F 的值域构成的. 但应当注意的是,首先,满占函数的定义只有在事先说明了 F 是从哪个集合到哪个集合的映射后才是有意义的,因为只有在此时,我们才能把值域 $\mathrm{ran}(F)$ 同映射所到的集合加以比较. 如果同单叶函数一样,不事先说明 F 是从哪个集合到哪个集合的映射,那么,F 永远是从 $\mathrm{dom}(F)$ 到 $\mathrm{ran}(F)$ 上的满占映射,从而使满占的定义成为多余. 其次,函数 F 是满占的,并不排除对任一 $y\in Y$,与 y 对应的 $x\in \mathrm{dom}(F)$ 可以是不唯一的,如上面提到的特征函数 C_A,这是因为满占和单叶是两个完全不同的概念.

定义 当 $F:X\rightarrow Y$ 是单叶映射时,称 F 是单射;

当 $F:X\rightarrow Y$ 是满占映射时,称 F 是满射;

当且仅当 $F:X\rightarrow Y$ 是单射并且满射时,称 F 是双射,或者是从 X 到 Y 上的一个一一对应.

例如,令 **R** 为实数集合,建立对应关系如下:

1. $I_x:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$, 定义:对任一 $x\in\mathbf{R}$, $I_x(x) = x$;
2. $F:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$, 定义:对任一 $x\in\mathbf{R}$, $F(x) = x^3$;
3. $G:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$, 定义:对任一 $x\in\mathbf{R}$, $G(x) = x^2$.

那么,容易验证,其中的 1 和 2 都是从 **R** 到 **R** 上的双射,但 3 却不是,因为 3 首先就不是从 **R** 到 **R** 上的满射.

三、集合的限制

定义 对任意给定的函数 F 和给定的集合 $A\subseteq \mathrm{dom}(F)$,记

$$F \mid A = \{(x,y) \in F \mid x \in A\}$$

为一集合，并称为集合 A 对 F 的限制.

A 对 F 的限制我们有时也称为 F 被集合 A 限制，限制集元素的第一坐标都要求必须是属于集 A 的元素，因此，有

$$F \mid A \subseteq F,$$

并且，当且仅当 $A = \mathrm{dom}(F)$ 时，有

$$F \mid A = F.$$

第七节　象和原象

象和原象都是形式理论如数学、集合论等常常要涉及的对象，也是在人们的实践中常常会涉及的概念. 在本节的讨论中，我们约定，所讨论的问题仅仅限制在事先说明的函数是哪个集合到哪个集合的情况中. 换言之，我们仅仅是在定义域、值域和对应关系都确定的情况下来讨论象和原象的.

一、象的定义

定义　对给定的任意函数 $F:X\to Y$，和给定的任意集合 $A\subseteq X$，记

$$F(A)=\{y\in Y \mid \exists x\in A(y=F(x))\}$$

为一集合，并且称它为在映射 F 下，集合 A 的象.

显然，映射 F 下集合 A 的象，是恰好由所有属于集合 A 的元素 x 的函数值所构成的一个集合，因此，这个集合可以简单地记为

$$F(A)=\{F(x)\mid x\in A\}.$$

在上述定义中应当注意区分 $F(A)$ 和 $F(x)$ 的关系. $F(x)$ 是由元素 x 在值域中确定的一个特定对应者，而 $F(A)$ 是满足条件 $x\in A$ 的所有对应者构成的集合. 所以有

$$x\in A\to F(x)\in F(A).$$

根据 $F(x)$ 和 $F(A)$ 的上述关系，在定义所设定的条件下，有

$$F(X)=\mathrm{ran}(F),$$
$$F(A)=\mathrm{ran}(F\mid A),$$
$$F(A)\subseteq \mathrm{ran}(F).$$

二、原象的定义

定义 对给定的任意函数 $F:X\to Y$，和给定的任意集合 $B\subseteq Y$，记

$$F^{-1}(B)=\{x\in X\mid \exists y\in B(y=F(x))\}$$

为一集合，并且称它为在映射 F 下，集合 B 的原象.

在象的定义中，由于集合 $A\subseteq \mathrm{dom}(F)$，所以对任意的 $x\in A$，都一定有 $x\in \mathrm{dom}(F)$. 但在原象的定义中，由于对一般的函数 F 来说，有 $\mathrm{ran}(F)\subseteq Y$，故当 $B\subseteq Y$ 时，不能肯定一定会有 $B\subseteq \mathrm{ran}(F)$. 由此可见，集合 B 只能同 $\mathrm{ran}(F)$ 平等地作为 Y 的子集来加以考虑. 我们用下面的图形来表示在这样的考虑中，B 同 $\mathrm{ran}(F)$ 的所有可能的情况.

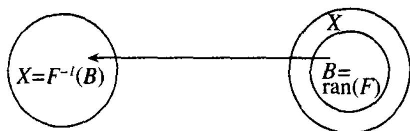


图 1

图 ① 反映的是，$\mathrm{ran}(F)=B$，因此，由 $B\subseteq Y$，使得 $x\in X$ 并且 $F(x)\in B$ 的所有 x 组成 B 的原象是 $F^{-1}(B)=X$.

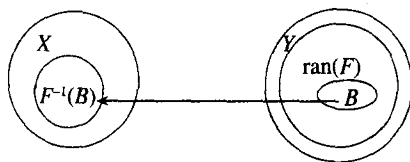


图 2

图 ② 反映的是 $B\subset \mathrm{ran}(F)$，因此，由于集合 B 被包容在值域 $\mathrm{ran}(F)$ 中，所以，$F^{-1}(B)$ 只能是集合 X 的一个子集.

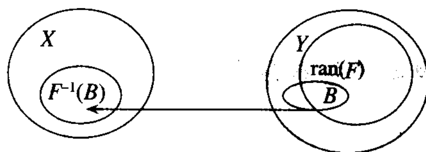


图 3

图 ③ 反映的是 B 与 $\mathrm{ran}(F)$ 相交，此时，尽管 $F^{-1}(B)$ 的图像同图 ② 中没有区别，但它仅仅是 B 与 $\mathrm{ran}(F)$ 相交部分在 X 中的原象.

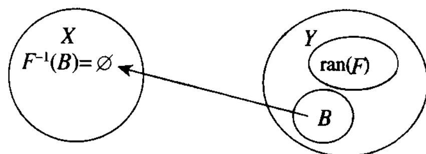


图 ④

图 ④ 反映的是 $B \cap \mathrm{ran}(F) = \varnothing$，因此在 X 中 B 在 F 下的原象只能是一个空集.

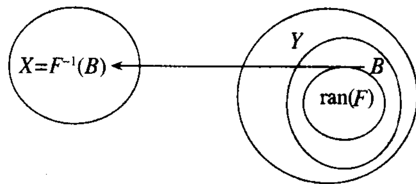


图 ⑤

图 ⑤ 在 X 中的图像虽然看起来同图 ① 的也没有区别，但它同样仅仅是集合 B 的部分元素的图像.

在下述的讨论中，我们常常把原象记为

$$F^{-1}(B) = \{x \in X \mid F(x) \in B\}.$$

三、象与原象的基本性质

象与原象的下述性质都是最基本的.

1. 给定任意的映射 $F:X\to Y$,都有

$$A_1\subseteq A_2\subseteq X\to F(A_1)\subset F(A_2).$$

证明:由已知,对任一 $x\in X$,由子集公理,有

$$\begin{aligned}A_1\subseteq A_2\subseteq X&\to(x\in A_1\to x\in A_2)\\&\to(F(x)\in F(A_1)\to F(x)\in F(A_2))\\&\to F(A_1)\subseteq F(A_2).\end{aligned}$$

2. 给定任意的映射 $F:X\to Y$,都有

$$B_1\subseteq B_2\subseteq Y\to F^{-1}(B_1)\subseteq F^{-1}(B_2).$$

证明:由已知,对任一 $y\in Y$,由子集定义,都有

$$B_1\subseteq B_2\subseteq Y\to(y\in B_1\to y\in B_2).$$

现在由原象定义,对任一 $x\in F^{-1}(B_1)$,是因为 $\exists y\in B_1(y=F(x))$,由于 $y\in B_1\to y\in B_2$,这就等于说 $\exists y\in B_2(y=F(x))$ 一定成立,也就等于是说对任一 $x\in F^{-1}(B_1)$,必定有 $x\in F^{-1}(B_2)$,由子集定义,肯定有

$$F^{-1}(B_1)\subseteq F^{-1}(B_2).$$

并且由上述的图解,对任意的 $y\in Y\wedge y\in B_1$,在 X 中找不到对应的 x 也不是不可能的,即此时有 $F^{-1}(B_1)=\varnothing$. 但如果情况是这样的话,由于空集是任意集合的子集,因此,性质 2 依然成立.

3. 给定任意的映射 $F:X\to Y$,设 $A\subseteq X$,则 $A\subseteq F^{-1}(F(A))$;并且,如果 F 是单射,则有 $A=F^{-1}(F(A))$.

证明:由 $A\subseteq E$ 和象的定义,对任意 $x\in X$,都有

$$x\in A\to F(x)\in F(A), \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

再由原象的定义,有

$$F(x)\in F(A)\leftrightarrow x\in F^{-1}(F(A)),$$

所以，由子集公理，

$$A \subseteq F^{-1}(F(A)).$$

在上述证明中，如果 F 不是单射，那么，除了有 $x \in A$，使公式 ① 为真以外，完全还可能有 x，使

$$(F(x) \in F(A)) \wedge (x \in X \wedge x \notin A) \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

为真. 因此，当 F 不是单射时，公式 ① 中的"$\rightarrow$"是不能换为"$\leftrightarrow$"的. 但当 F 为单射时，由单射的定义，使得公式 ① 真的 x 不可能使公式 ② 真，故公式 ① 中的"$\rightarrow$"换为"$\leftrightarrow$"也必然成立，即有

$$A = F^{-1}F(A)).$$

4. 给定任意的映射 $F: X \rightarrow Y$，设 $B \subseteq Y$，则 $F(F^{-1}(B)) \subseteq B$；并且，如果 F 是满射，则有

$$F(F^{-1}(B)) = B.$$

证明：由 $B \subseteq Y$ 和象的定义，对任意 $y \in Y$，都有

$$y \in F(F^{-1}(B)) \rightarrow \exists x \in F^{-1}(B)(y = F(x)),$$

再由原象的定义，

$$\exists x \in F^{-1}(B) \rightarrow \exists z \in B(z = F(x));$$

但 F 是函数，由

$$y = F(x) \wedge z = F(x),$$

必然有

$$y = z.$$

于是有

$$y \in F(F^{-1}(B)) \rightarrow y \in B,$$

由子集公理，

$$F(F^{-1}(B)) \subseteq B.$$

当 F 不是满射时，上述证明的结论是不可逆的. 即

$$y \in B \rightarrow y \in F(F^{-1}(B))$$

可能不是真的. 因为当 $y \in B$ 为真时，由前面所图示的集合 B 与 $\mathrm{ran}(F)$ 的关系中的图 ③ ～ ⑤，$\exists x \in F^{-1}(B)(y = F(x))$ 不一定

真，y 此时不在 F 的值域中是完全可能的.

但当 F 是满射时，有

$$B \subseteq \operatorname{ran}(F) = Y,$$

那么，对任意的 $y \in B$，都有

$$y \in B \rightarrow \exists x \in X(y = F(x)),$$

由原象定义，

$$x \in F^{-1}(B),$$

再由象的定义，

$$y \in F(F^{-1}(B)),$$

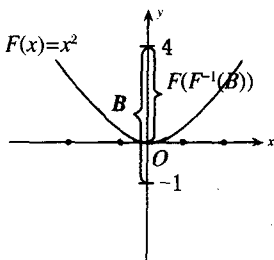
由子集公理，

$$B \subseteq F(F^{-1}(B)).$$

综合前一证明，必然有

$$F(F^{-1}(B)) = B.$$

关于性质 4，我们给出下面的一个实例来帮助理解. 令 $F:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$，其中，$\mathbf{R}$ 为实数集. 对任意的 $x \in \mathbf{R}$，定义 $F(x) = x^2$. 先再令 $B = [-1,4] \subseteq \mathbf{R}$ 那么，有 $F^{-1}(B) = [-2,2]$，而 $F(F^{-1}(B)) = [0,4]$. 可见，由于我们定义的 F 并不是一个由 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的满射，因此就有 $F(F^{-1}(B)) \subseteq B$.



但如果我们把上面的 F 改为 $F:\mathbf{R}\rightarrow\{0\}\cup\mathbf{R}^+$，其中的 $\mathbf{R}^+$ 为正实数集，那么如上定义的 F 必定是由 $\mathbf{R}$ 到 $\{0\}\cup\mathbf{R}^+$ 集上的满射，此时，无论 B 是 $\{0\}\cup\mathbf{R}^+$ 集的怎样的一个子集，可以验证，都一定会有 $F(F^{-1}(B)) = B$.

5. 给定任意的映射 $F:X\rightarrow Y$，设 $A \subseteq X$，并且 $B \subseteq X$，那么，

$$F(A \cup B) = F(A) \cup F(B).$$

证明：对任意给定的 $y \subseteq Y$，都有

$$
\begin{aligned}
y(F(A \cup B) &\leftrightarrow \exists x(x \in (A \cup B) \wedge y = f(x)) \\
&\leftrightarrow \exists x((x \in A \vee x \in B) \wedge y = F(x)) \\
&\leftrightarrow \exists x((x \in A \wedge y = F(x)) \vee (x \in B \wedge y = \\
&\quad F(x))) \\
&\leftrightarrow \exists y(y \in F(A)) \vee (y \in F(B)) \\
&\leftrightarrow y \in (F(A) \cup F(B)).
\end{aligned}
$$

由外延公理，

$$F(A \cup B) = F(A) \cup F(B).$$

6. 给定任意的映射 $F:X \to Y$，设 $A \subseteq X$，并且 $B \subseteq X$，那么，

$$F(A \cap B) \subseteq (F(A) \cap F(B)).$$

并且，如果 F 是单射，那么，

$$F(A \cap B) = (F(A) \cap F(B)).$$

证明：对任意给定的 $y \in Y$，都有

$y \in F(A \cap B)$

$\leftrightarrow \exists x(x \in (A \cap B) \wedge y = f(x))$ …………………… ①

$\leftrightarrow \exists x((x \in A \wedge x \in B) \wedge y = F(x))$ ……………… ②

$\leftrightarrow \exists x((x \in A \wedge y = F(x)) \wedge (x \in B \wedge y = F(x)))$

…………………………………………………………… ③

$\to (y \in F(A)) \wedge (y \in F(B))$ ……………………… ④

$\leftrightarrow y \in (F(A) \cap F(B)).$ ……………………………… ⑤

由子集公理，

$$F(A \cap B) \subseteq (F(A) \cap F(B)).$$

在上述证明中，③ 和 ④ 之间的"$\to$"号是不可以随便换以"$\leftrightarrow$"号的. 这是因为，固然由 ③ 的存在某个集合 x，使得 x 既属于集合 A 又属于集合 B 并且有 $y = F(x)$，可以必然地推断

$$(y \in F(A)) \wedge (y \in F(B))$$

为真，但反之，由 y 属于集合 A 的象和 y 属于集合 B 的象，去推断 y 一定是由既属于 A 集又属于 B 集的 x 所决定的则是没有保证的，

是不必然的. 因为，由 ④ 到 ③ 的正确表述应该是：

$$(y \in F(A)) \wedge (y \in F(B))$$

$$\rightarrow \exists x(x \in A \wedge y = F(x)) \wedge \exists z(z \in B \wedge y = F(z)).$$

当 F 不是单射时，存在 $x \in A, z \in B$，并且 $x \neq z$，但使得

$$F(x) = y = F(z)$$

为真，从象的定义看，这完全是必然的. 但当 F 为单射时，由单射的定义，对同一个 y 来说，只能有

$$x = z,$$

即，③ 和 ④ 之间的"→"号是必须换以"↔"号的，故

$$F(A \cap B) = (F(A) \cap F(B)).$$

7. 给定任意的映射 $F: X \rightarrow Y$，设 $A \subseteq X$，并且 $B \subseteq X$，那么，

$$(F(A) \sim F(B)) \subseteq F(A \sim B);$$

并且，如果 F 是单射，那么，

$$(F(A) \sim F(B)) = F(A \sim B).$$

证明：对任意给定的 $y \in Y$，都有

$y \in (F(A) \sim F(B))$

$\leftrightarrow (y \in F(A)) \wedge (y \notin F(B))$ ………………………… ①

$\leftrightarrow (y \in F(A)) \wedge (F(x) \notin F(B))$ ……………………… ②

$\rightarrow \exists x(x \in A \wedge y = F(x) \wedge x \notin B)$ ………………… ③

$\leftrightarrow \exists x((x \in A \wedge x \notin B) \wedge y = F(x))$ ……………… ④

$\leftrightarrow \exists x(x \in (A \sim B) \wedge y = F(x))$ …………………… ⑤

$\leftrightarrow y \in F(A \sim B).$

由子集公理，

$$(F(A) \sim F(B)) \subseteq F(A \sim B).$$

在上述证明中，② 和 ③ 之间的"→"号是不可以随便换以"↔"号的. 这是因为当 F 不是单射时，由 $(F(x) \notin F(B))$ 推断 $x \notin B$ 这是必然的；但由 ③ 推断 ② 却是不必然的，因为 F 的非单射条件不能排除使 ③ 公式为真但 ② 为假的情况，即在

$$(\exists x(x \in A \land y = F(x) \land x \notin B)) \rightarrow y \in F(B)$$

中，有前件真并且公式的值也真的情况存在．然而，当 F 为单射时，由③推断②也是必然的，故②③之间的"→"号是必然能换以"↔"号的，所以

$$(F(A) \sim F(B)) = F(A \sim B).$$

8. 给定任意的映射 $F: X \rightarrow Y$，设 $C \subseteq Y$，并且，$D \subseteq Y$，那么，

$$F^{-1}(C \cup D) = F^{-1}(C) \cup F^{-1}(D).$$

证明：对任意给定的 $x \in X$，都有

$$
\begin{aligned}
& x \in F^{-1}(C \cup D) \\
& \quad \leftrightarrow \exists y(y \in (C \cup D) \land y = F(x)) \\
& \quad \leftrightarrow \exists y((y \in C \lor y \in D) \land y = F(x)) \\
& \quad \leftrightarrow \exists y((y \in C \land y = F(x)) \lor (y \in D \land y = F(x))) \\
& \quad \leftrightarrow x \in F^{-1}(C) \lor x \in F^{-1}(D) \\
& \quad \leftrightarrow x \in (F^{-1}(C) \cup F^{-1}(D)),
\end{aligned}
$$

由外延公理

$$F^{-1}(C \cup D) = F^{-1}(C) \cup F^{-1}(D).$$

9. 给定任意的映射 $F: X \rightarrow Y$，设 $C \subseteq Y$，并且，$D \subseteq Y$，那么，

$$F^{-1}(C \cap D) = F^{-1}(C) \cap F^{-1}(D).$$

证明：对任意给定的 $x \in X$，都有

$$
\begin{aligned}
& x \in F^{-1}(C \cap D) \\
& \quad \leftrightarrow \exists y(y \in (C \cap D) \land y = F(x)) \\
& \quad \leftrightarrow \exists y((y \in C \land y \in D) \land y = F(x)) \\
& \quad \leftrightarrow \exists y((y \in C \land y = F(x)) \land (y \in D \land y = F(x))) \\
& \quad \leftrightarrow x \in F^{-1}(C) \land x \in F^{-1}(D) \cdots\cdots\cdots\cdots \text{※} \\
& \quad \leftrightarrow x \in (F^{-1}(C) \cap F^{-1}(D)),
\end{aligned}
$$

由外延公理，

$$F^{-1}(C \cap D) = F^{-1}(C) \cap F^{-1}(D).$$

在上述证明中，带有"※"一行和其前一行的关系是，由前一

行推出后一行是必然的，但由后一行推断前行的正确推理应当是

$x \in F^{-1}(C) \wedge x \in F^{-1}(D)$

$\leftrightarrow \exists y(y \in C \wedge y = F(x)) \wedge \exists z(z \in D \wedge z = F(x)))$;

但既然 F 是函数，对同一个给定的 x，当然有

$$y = F(x) = z,$$

即有

$$y = z.$$

故上述两行能够相互推出.

10. 给定任意的映射 $F: X \to Y$，设 $C \subseteq Y$，并且，$D \subseteq Y$，那么，

$$F^{-1}(C \sim D) = F^{-1}(C) \sim F^{-1}(D).$$

证明：对任意给定的 $x \in X$，都有

$x \in F^{-1}(C \sim D)$

$\leftrightarrow \exists y(y \in (C \sim D) \wedge y = F(x))$

$\leftrightarrow \exists y((y \in C \wedge y \notin D) \wedge y = F(x))$

$\leftrightarrow \exists y((y \in C \wedge y = F(x)) \wedge (y \notin D \wedge y = F(x)))$

$\leftrightarrow x \in F^{-1}(C) \wedge (x \notin F^{-1}(D)$

$\leftrightarrow x \in (F^{-1}(C) \sim F^{-1}(D))$,

由外延公理，

$$F^{-1}(C \sim D) = F^{-1}(C) \sim F^{-1}(D).$$

第八节　反函数集和复合函数集

函数集是一种特殊类型的关系集，要求在它的所有元素中，能与同一个第一坐标对应的第二坐标应当是确定的、不可选择的. 现在，按前面的讨论，关系的逆关系总被认为是存在的，那么，既然函数这种关系带有特殊的要求，是一种特殊的关系，固然它的逆关系肯定是存在的，但这种逆关系还一定是函数关系吗?从人们的认识经验上看，显然是并不必然的. 例如，给定集合 $F=\{(x,x^2)\mid x\in \mathbf{R},\mathbf{R}$ 是实数集$\}$，F 为函数关系是显然的. 但其逆关系 $F^{-1}=\{(x^2,x)\mid x\in\mathbf{R},\mathbf{R}$ 是实数集$\}$，众所周知却不是我们甚至数学中所定义的函数关系. 但事实上，函数关系也都总是存在逆函数的，只不过在确定其逆函数之前，我们在多数情况下需要首先对已知的函数关系本身做一些特殊的处理罢了.

一、反函数集

定理　对于函数集 F，当且仅当 F 是单叶的，F^{-1} 是函数集.

证明：F 是单叶的，是说

$$(x,y)\in F\wedge(z,y)\in F\rightarrow x=z$$

一定为真. 这等于说，

$$(y,x)\in F^{-1}\wedge(y,z)\in F^{-1}\rightarrow x=z$$

也一定为真. 由函数集的定义. 这就等于说 F^{-1} 是函数集.

定义　对于函数集 F，当且仅当 F^{-1} 也是函数集，称 F^{-1} 是 F 的反函数集. 在以下的讨论中，我们把反函数集简称为反函数.

由前面证明的定理，反函数的定义相当于说，当且仅当函数 F

是单叶的，就称 F^{-1} 是 F 的反函数. 例如，集合

$$F = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbf{R}^+, \mathbf{R}^+ \text{是正实数集}\}$$

反映的是由 $\mathbf{R}^+$ 到 $\mathbf{R}^+$ 上的一个函数关系，并且是单叶的，因此，

$$F^{-1} = \{(x^2, x) \mid x \in \mathbf{R}^+, \mathbf{R}^+ \text{是实数集}\}$$

就是 F 由 $\mathbf{R}^+$ 到 $\mathbf{R}^+$ 上的一个反函数.

反函数总是相对的. 这是因为作为关系的逆始终有性质

$$(F^{-1})^{-1} = F.$$

这表明，当 F^{-1} 是 F 的反函数时，F 同样是 F^{-1} 的反函数. 由此我们可以推断，单叶函数的反函数还是单叶函数.

对于单叶函数，在反函数上存在下面的性质：

设函数 F 是单叶的，那么，对任意的 x, y 都有

$$x \in \mathrm{dom}(F) \to F^{-1}(F(x)) = x;$$

$$y \in \mathrm{ran}(F) \to F(F^{-1}(y)) = y.$$

这是因为，F 是单叶函数，故对任意的 $y \in \mathrm{ran}(F)$，都唯一存在 $x \in \mathrm{dom}(F)$，使得 $(x, y) \in F$，并且 $(y, x) \in F^{-1}$，用映射的另一种表达方式，分别有

$$y = F(x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ①$$

和

$$x = F^{-1}(y), \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ②$$

现在把 ① 代入 ②，有

$$F^{-1}(F(x)) = x;$$

把 ② 代入 ①，有

$$F(F^{-1}(y)) = y.$$

它们正是我们在上面所指出的结果.

定理 如果 $F: X \to Y$ 是双射，那么，$F^{-1}: Y \to X$ 是双射.

证明：假设 $F: X \to Y$ 是双射而 $F^{-1}: Y \to X$ 不是双射，那么，

1. 或者 $F^{-1}: Y \to X$ 不是单射. 这意味着存在 $y, z \in Y$，对同一个 $x \in X$，有

$$y \neq z \wedge (y,x) \in F^{-1} \wedge (z,x) \in F^{-1},$$

因此，有

$$y \neq z \wedge (x,y) \in F \wedge (x,z) \in F,$$

但这表明 F 不是函数，与已知 F 是双射显然是矛盾的，故 $F^{-1}: Y \to X$ 只能是单射.

2. 或者 $F^{-1}: Y \to X$ 不是满射. 这意味着存在 $x \in X$，使得 $x \notin \mathrm{ran}(F^{-1})$. 但 $F: X \to Y$ 是双射，有 $\mathrm{dom}(F) = \mathrm{ran}(F^{-1}) = X$，这使得存在 $x \in X$，同 $x \notin \mathrm{ran}(F^{-1})$ 构成一个矛盾，因此，$F^{-1}: Y \to X$ 不能不是满射.

综上所述，定理成立.

对于函数 F，我们把满足上面定理要求的 F^{-1} 称为是 F 的逆映射. 逆映射可以理解为一一对应关系在处理函数集时的一个特殊的术语.

例 设 $F: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$，定义：$F(x) = \sin x$. 则 $F^{-1}: [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$，现在，定义：$F^{-1}(x) = \arcsin x$，显然，在上述定义下，$F$ 和 F^{-1} 互为逆映射.

二、复合函数集

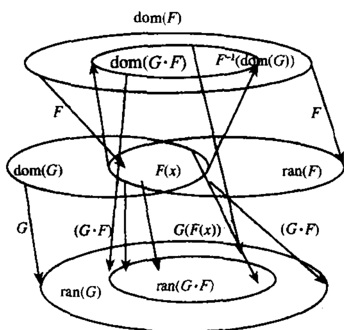
定理 设 F, G 都是函数，那么，

1. $G \cdot F$ 也是函数；
2. $\mathrm{dom}(G \cdot F) = F^{-1}(\mathrm{dom}(G))$；
3. 对任意的 $x \in \mathrm{dom}(G \cdot F)$，都有：

$$(G \cdot F)(x) = G(F(x)).$$

由于 F, G 都是函数，我们可以先以图像来观察定理所需要的证明.

右边的图像表明，$F^{-1}(\mathrm{dom}(G))$ 是函数 F 的值域和函数 G 的定义域的一个交集在 F 定义域中的一个原象. 复合函数集 $(G \cdot F)$ 正是以这个原象为定义域，而以函数 G 的值域中的一个子集为值域来定义的函数. 并且还可以观察到，复合函数 $(G \cdot F)$ 对任意的 $x \in \mathrm{dom}(G \cdot F) = F^{-1}(\mathrm{dom}(G))$ 的作用，就等于 G 对任意的 $F(x) \in \mathrm{dom}(G) \cap \mathrm{ran}(F)$ 的作用.



证明：首先证明 $(G \cdot F)$ 是函数集. 我们只需要证明对于任意的 $(x,y) \in (G \cdot F)$，都有

$$(x,y) \in (G \cdot F) \land (x,z) \in (G \cdot F) \rightarrow y = z$$

为真就可以了. 事实上，由 $G \cdot F$ 首先是复合关系和关系复合的定义，有

$$(x,y) \in (G \cdot F) \land (x,z) \in (G \cdot F)$$

$$\leftrightarrow \exists u((x,u) \in F \land (u,y) \in G) \land v((x,v) \in F \land (v,z) \in G)$$

$$\leftrightarrow \exists u \exists v((x,u) \in F \land (u,y) \in G \land (x,v) \in F \land (v,z) \in G).$$

但已知 F,G 都是函数，故有

$$(x,u) \in F \land (x,v) \in F \rightarrow u = v;$$

$$((u,y) \in G \land (v,z) \in G) \land (u = v) \rightarrow y = z.$$

可见，只要 F,G 是函数，就一定有

$$(x,y) \in (G \cdot F) \land (x,z) \in (G \cdot F) \rightarrow y = z$$

为真，即 $(G \cdot F)$ 是函数.

其次证明：$\mathrm{dom}(G \cdot F) = F^{-1}(\mathrm{dom}(G))$. 我们只需证明，对任意的 x，都有

$$x \in \mathrm{dom}(G \cdot F) \leftrightarrow \exists z((x,z) \in (G \cdot F))$$

$$\leftrightarrow \exists z(z = (G \cdot F)(x))$$
$$\leftrightarrow \exists z(\exists y((x,y) \in F \wedge (y,z) \in G))$$
$$\leftrightarrow \exists y(y = F(x) \wedge y \in \mathrm{dom}(G))$$
$$\leftrightarrow \exists y \in \mathrm{dom}(G)(y = F(x))$$
$$\leftrightarrow x \in F^{-1}(\mathrm{dom}(G)).$$

由 x 的任意性和外延公理，

$$\mathrm{dom}(G \cdot F) = F^{-1}(\mathrm{dom}(G)).$$

最后，我们证明，对任意的 $x \in \mathrm{dom}(G \cdot F)$，都有 $(G \cdot F)(x) = G(F(x))$. 而对3，我们只需要引用证明2的一些结果就可以了. 在 2 的证明过程中，对任意的 x，我们有

$$z = (G \cdot F)(x), \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$
$$y = F(x), \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

也能得到

$$z = G(y). \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{③}$$

现在，把 ③ 代入 ①，有

$$G(y) = (G \cdot F)(x), \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{④}$$

把②代入④，有

$$G(F(x)) = (G \cdot F)(x). \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑤}$$

显然，等式 ⑤ 就是我们所需要的结论.

集合 $(G \cdot F)$ 称为函数集 F 和 G 的复合函数集. 在数学理论中把 $(G \cdot F)$ 称为函数 F 和 G 的复合函数. 但应当注意的是，上述讨论是在集合的形式语言下非常一般的讨论，因此其结果同数学中的提法还是有差别的. 例如，在集合论的讨论中，当 $\mathrm{ran}(F) \cap \mathrm{dom}(G) = \varnothing$ 时，有 $(G \cdot F) = \varnothing$，而这在集合论中是被认为有意义的；但在数学的实变函数的讨论中却被认为是没有意义的.

在对复合函数集上述内容的理解中，我们应当注意以下几点：

首先，既然复合函数集最终是在关系集的复合基础上定义的，

因此，复合函数集对关系集的一些基本的性质也是满足的. 例如，对于复合函数集来说，交换律一般是不能成立的，但结合律成立，即有

$$G \cdot F \neq F \cdot G;$$

$$(G \cdot F) \cdot H = G \cdot (F \cdot H).$$

其次，如果 F,G 是单叶函数，那么$(G \cdot F)$ 的反函数存在：

$$(G \cdot F)^{-1} = F^{-1} \cdot G^{-1}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

并且$(G \cdot F)$ 及其$(G \cdot F)^{-1}$ 都是单叶函数.

事实上，F,G仅就作为一般的关系，在关系的复合以及复合关系的逆的讨论中，我们已证明了等式 ① 是成立的. 下面只需说明$(G \cdot F)$ 及其逆都是单叶的即可.

由于 F,G 都是单叶的，由已证，F^{-1},G^{-1} 都是单叶函数. 再由讨论复合函数集所证明的定理，$(G \cdot F)$，$(F^{-1} \cdot G^{-1})$ 必然都是函数.

如果函数$(G \cdot F)$ 不是单叶的，那么一定有 $x \neq u$，使得

$(x,z) \in (G \cdot F) \wedge (u,z) \in (G \cdot F)$

$\rightarrow \exists y((x,y) \in F \wedge (y,z) \in G) \wedge \exists v((u,v) \in F \wedge (v,z) \in G)$

$\rightarrow \exists y \exists v((x,y) \in F \wedge (y,z) \in G \wedge (u,v) \in F \wedge (v,z) \in G)$

$\rightarrow \exists y \exists v(((x,y) \in F \wedge (u,v) \in F) \wedge ((y,z) \in G \wedge (v,z) \in G))$，

由于 G 是单叶函数，故必定有 $y = v$；于是，从上式中一定可推出

$$(x,y) \in F \wedge (u,y) \in F.$$

但已知 F 也是单叶的，因此不可能有 $x \neq u$，即必然有 $x = z$. 这表明函数$(G \cdot F)$ 必定是单叶的. 由前面已证，则$(G \cdot F)^{-1}$ 还是单叶的.

最后，是在复合函数中的一种特殊的情况，即如果

$$F: X \rightarrow Y$$

是双射，那么

$$F^{-1} \cdot F = I_x;$$

并且

$$F \cdot F^{-1} = I_y;$$

其中，I_x，I_y 分别是 X 到 X 上的和 Y 到 Y 上的恒等函数.

三、函数的单叶化

本节一开始，我们就说过，函数是否存在逆函数，从经验上看是不必然的. 但事实上，函数关系在某种条件下也确实存在逆函数. 某种条件是指，在找出其逆函数之前，在多数情况下要求我们对函数本身做一些特殊的处理，在数学中，这些处理通常是通过限制变量的定义域或者值域来实现的. 而集合论中的方法不相同，下面，我们就来做这一工作.

一个任意给定的函数不一定是单叶函数. 为了既保留函数的所有的值，又使得函数具有单叶的属性，我们先来描述一个关系 R：对任意给定的函数 $F:X\to Y$，都存在集合 R，使得对任意的 x_1，$x_2 \in X$，都有

$$(x_1, x_2) \in R \leftrightarrow F(x_1) = F(x_2).$$

不难验证，上述刻画的集合 R 实际上是一等价关系，使得每一 $[x]_R$ 中的元素，都有相同的函数值，而属于不同等价类中的元素，必定具有不同的函数值.

定义　给定映射 $\hat{F}:X/R\to Y$，定义 $\hat{F}$ 为 $\hat{F}([x]_R) = F(x)$，那么，$\hat{F}$ 就是从 X/R 到 Y 的一个单射，并称 $\hat{F}$ 为函数 F 的单叶化.

上述关于函数单叶化的定义，表明了我们在本节一开始所断言的：函数关系也都总存在逆函数，看我们如何去处理它而已，定义只不过是提供了一种集合的处理方式.

对任意函数 $F:X\to Y$，我们总可以在集合 X 中建立某个等价

关系R，故也总可以建立起自然映射$\varphi: X \to X/R$，由$\varphi(x)=[x]_R$，那么容易证明$\hat{F}=\hat{F}\cdot\varphi$. 任何一个函数$F$都可以被分解为一自然映射$\varphi$与$F$的单叶化函数$\hat{F}$的复合函数，从而既可以利用逆函数的各种性质，又可以保留原函数的全部函数值.

第九节　族

在本节之前,我们进行了对一般的集合、进而是一般的关系集、函数集等的讨论.下面,我们引入一新的概念,从而对上述讨论的内容能够进行更为抽象的概括,并因此能将理论更为顺利地引向深入.

一、关于族的概念

定义　设给定集合 I,以及定义在 I 上的函数 A,对任意给定的 $i \in I$,记

$$A_i = A(i),$$

并用

$$(A_i)_{i \in I}$$

来记这个函数,并且称这个函数为一个族.

如果 A 是从 I 到 M 内的函数,即若有 $A:I \to M$,则可记

$$(A_i)_{i \in I}(A_i \in M).$$

在上述定义中,我们称集合 I 为标集;而对任意的 $i \in I$ 称为标号;A_i 则称为这个族的项.

由上述定义可知,因为 A 是函数集,所以,一个族其实就是在集合的表达方式下所描述的一个函数集合,并且显然有

$$\text{dom}(A) = I,$$

$$\text{ran}(A) \in I \text{ 或者 } M.$$

而 A_i 即函数 A 在 i 时的函数值.例如,我们以 ω 表示由自然数构成的集合,以 ω_e 表示由自然数中的所有偶数构成的集合.现在记

$$F: \omega \to \omega_e$$

为一映射，定义 $F(n) = 2n$. 可以验证，F 是一函数，并且，以族的形式，该函数可以记为

$$(F_n)_{n\in\omega}(F_n \in \omega_e).$$

可以说，从集合的角度，任何一个函数，在记法上都可以统一于集合的这种方式. 例如，

$$(\sin x)_{x\in\mathbf{R}}(\sin x \in \mathbf{R})$$

所表达的，就是建立在实数集合上的正弦函数.

由于族说到底是函数，是集合，因此，就不能阻止在集合的意义下，族含义的继续延伸.

定义 对任意给定的族 $(A_i)_{i\in I}$ 或者 $(A_i)_{i\in I}(A_i \in M)$，如果每个 A_i 都是集合，则称 $(A_i)_{i\in I}$ 或者 $(A_i)_{i\in I}(A_i \in M)$ 为一集族.

在上述定义中，以 $\operatorname{ran}(A_i)_{i\in I}$ 或者 $\operatorname{ran}(A_i)_{i\in I}(A_i \in M)$ 表示集族的值域，即它恰好包含所有的项 A_i. 显然，按前述约定，这样的值域是一个集组. 例如，对上述给定的族

$$(F_n)_{n\in\omega}(F_n \in \omega_e),$$

有

$$\operatorname{ran}(F_n)_{n\in\omega}(F_n \in \omega_e) = \omega_e.$$

而对任意的 $F_n \in \omega_e$，F_n 都是集合（这一点留待下一章说明），因此，$\operatorname{ran}(F_n)_{n\in\omega}(F_n \in \omega_e)$ 是一集组.

集族与集组的关系非常密切. 对于一个任意给定的集组 M，都至少存在某个标集 I 和定义在 I 上的某个函数 A，从而形成一个集族 $(A_i)_{i\in I}$，使得

$$(A_i)_{i\in I} = M.$$

或者也可以说，都至少存在某个标集 I 和某个定义在 I 上的函数 A，使得映射 $A: I \to M$ 为一满射. 例如，我们不妨就取上述映射中的 $M = I$ 为标集，取映射 A 是建立在 M 上的恒等函数，即对任意的 $i \in M$，都有 $A_i = i$，此构造的 $(A_i)_{i\in M}$ 首先是一个集族，并且它

恰好等于 M.

上述关于集族和集组关系的讨论，其意义在于，它们虽然是两个不同的概念，但两者却是可以互相代替的：使得集族的所有项，恰好是集组的所有元素；反之，使集组的所有元素，也恰好能够转换为集族的所有项，这对集合论的某些理论的讨论、证明通常可以带来便利.

二、集族的项的并集

定义　对任意给定的集族$(A_i)_{i\in I}$，记 $M=\mathrm{ran}(A_i)_{i\in I}$，并记

$$\bigcup_{i\in I} A_i=\bigcup(M)$$

为一集合，称为集族$(A_i)_{i\in I}$ 诸项的并集.

由并集的定义，集族$(A_i)_{i\in I}$ 诸项的并集也可记为

$$\bigcup_{i\in I} A_i=\{x\mid \exists i\in I(x\in A_i)\}.$$

后一表达式更能清楚地表明定义中集合之间的相等关系. 由于 $M=\mathrm{ran}(A_i)_{i\in I}$，所以，一方面对任意的 $i\in I$，都有 $A_i\in M$，另一方面，对于任意的 $X\in M$，都至少存在一个 $i\in I$，使得 $A_i=X$，可见，关系式

$$x\in(\bigcup M)\leftrightarrow(\exists X\in M(x\in X\leftrightarrow\exists i\in I(x\in A_i)))$$

在定义的前提条件下恒为真.

三、集族的项的交集

定义　对任意给定的集族$(A_i)_{i\in I}$，其中，$I\neq\varnothing$，记 $M=\mathrm{ran}(A_i)_{i\in I}$，并记

$$\bigcap_{i\in I} A_i=\bigcap(M)$$

为一集合，称为集族$(A_i)_{i\in I}$ 诸项的交集.

由交集的定义，集族$(A_i)_{i\in I}$诸项的交集也可记为

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I(x \in A_i)\}.$$

后一表达式更能清楚地表明定义中集合之间的相等关系. 由于$I \neq \varnothing$，故

$$M = \operatorname{ran}(A_i)_{i\in I} \neq \varnothing.$$

这是因为，

$$I \neq \varnothing \leftrightarrow \operatorname{dom}(A) \neq \varnothing;$$

如果此时有

$$M = \operatorname{ran}(A_i)_{i\in I} = \varnothing,$$

那么由定义域的定义，对任意的$i \in I$，都一定$A_i \in M$，使得$(i, A_i) \in A$就不能成立. 所以，一方面对任意的$i \in I$，都有$A_i \in M$，而另一方面，对于任意的$X \in M$，都至少存在一个$i \in I$，使得$A_i = X$，可见关系式

$$x \in \bigcap(M) \leftrightarrow \forall X \in M(x \in X \leftrightarrow \forall i \in I(x \in A_i))$$

在定义的前提条件下恒为真.

在上述定义中，$I \neq \varnothing$，从而使$\operatorname{ran}(A_i)_{i\in I} = M \neq \varnothing$是非常必要的，否则，$\bigcap_{i\in I} A_i$可能不存在.

四、集族的并、交运算律

对于一般的集族或者集组来说，由于都是无序集，所以讨论其并或者交运算的交换律都是没有什么实际意义的. 我们下面只讨论它们的结合律及其他规律.

集族的标集I在并与交的运算中有相同的作用，我们首先讨论它的情况. 对于任意给定的集族$(A_i)_{i\in I}$，先把其中的标集用某种方式予以分组，这相当于建立一个新的集族$(J_r)_{r\in K}$，不管分组以什么样的方式进行，都应该有

$$\operatorname{ran}(J_r)_{r\in K} \subseteq \wp(I),$$

所以,

$$I = \bigcup (J_r)_{r\in K}.$$

显然,在上述设定的条件下,I 本身成为一个求并的结果,其中的 K 被称为新的标集,r 为新的标号,对任意的 $r\in K$,都有 $J_r \in I$. 这样做的结果使得原来的族 $(A_i)_{i\in I}$ 的项也被相应的分成了 K 组. 以下的证明,大部分是建立在对 I 的上述处理基础上的.

1. 集族诸项并的结合律

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{r\in K} \bigcup_{i\in J_r} A_i$$

即,集族诸项的并,等于对集族诸项分组求并,再以各组为元素求各组的并.

证明:令

$$J : K \to \wp(I)$$

为 K 到 $\wp(I)$ 内的一个映射,并使

$$I = \bigcup_{r\in K} J_r.$$

由上述分析,这总是能够做到的. 那么,对任意的 x,都有

$$\begin{aligned}
x \in \bigcup_{i\in I} A_i &\leftrightarrow \exists i(i \in I \wedge x \in A_i) \\
&\leftrightarrow \exists i \exists r(r \in K \wedge i \in J_r \wedge x \in A_i) \\
&\leftrightarrow \exists r(r \in K \wedge \exists i(i \in J_r \wedge x \in A_i)) \\
&\leftrightarrow \exists r(r \in K \wedge x \in \bigcup_{i\in J_r} A_i) \\
&\leftrightarrow x \in \bigcup_{r\in K} \bigcup_{i\in J_r} A_i.
\end{aligned}$$

由外延公理,有

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{r\in K i\in} \bigcup_{i\in J_r} A_i.$$

2. 集族诸项交的结合律

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{r\in K} \bigcup_{j\in J_r} A_i.$$

即,集族诸项的交,等于对集族诸项分组求交,再以各组为元素

求各组的交.

证明:令

$$J:K\to \wp(I)$$

为 K 到$\wp(I)$ 内的一个映射,并使

$$I=\bigcup_{r\in K}J_r.$$

由上述分析,这总是能够做到的. 由于 $I\neq\varnothing$,因此 $\mathrm{ran}(A_i)_{i\in I}=\varnothing$,故$(A_i)_{i\in I}$ 诸项的交必定存在. 那么,对任意的 x,都有

$$x\in\bigcap_{i\in I}A_i\leftrightarrow\forall i(i\in I\wedge x\in A_i)$$

$$\leftrightarrow\forall i\forall r(r\in K\wedge i\in J_r\wedge x\in A_i)$$

$$\leftrightarrow\forall r(r\in K\wedge\ \forall i(i\in J_r\wedge x\in A_i))$$

$$\leftrightarrow\forall r(r\in K\wedge x\in\bigcap_{i\in J_r}A_i)$$

$$\leftrightarrow x\in\bigcap_{r\in k}\bigcap_{i\in J_r}A_i,$$

由外延公理,

$$\bigcap_{i\in I}A_i=\bigcap_{r\in K}\bigcap_{i\in J_r}A_i.$$

3. 集族并交运算的分配律

第一分配律:设集合 A,集族$(B_i)_{i\in I}$ 都是使交运算有意义的,那么,

$$A\cap\bigcup_{i\in I}B_i=\bigcup_{i\in I}(A\cap B_i).$$

即,A 与集族诸项并的交,等于 A 与集族诸项交的并.

证明:对任意给定的 x,都有

$$x\in A\cap\bigcup_{i\in I}B_i$$

$$\leftrightarrow x\in A\wedge x\in\bigcup_{i\in I}B_i$$

$$\leftrightarrow x\in A\wedge\ \exists i(i\in I\wedge x\in B_i)$$

$$\leftrightarrow\exists i(i\in I\wedge x\in A\wedge x\in B_i)$$

$$\leftrightarrow\exists i(i\in I\wedge x\in A\wedge B_i)$$

$$\leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I}(A \cap B_i).$$

由外延公理，

$$A \cap \bigcup_{i\in I} B_i = \bigcup_{i\in I}(A \cap B_i).$$

第二分配律：设 A 为任意集合，给定任意的集族 $(B_i)_{i\in I}$，都有 $I \neq \varnothing$，那么，

$$A \cup \bigcap_{i\in I} B_i = \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i).$$

即，A 与集族诸项交的并，等于 A 与集族诸项并的交.

证明：因为 $I \neq \varnothing$，故 $\operatorname{ran}(B_i)_{i\in I} \neq \varnothing$，所以，对任意给定的 x，都有

$$\begin{aligned}
& x \in (A \cup \bigcap_{i\in I} B_i) \\
& \leftrightarrow x \in A \vee x \in \bigcap B_i \\
& \leftrightarrow x \in A \vee \forall i(i \in I \wedge x \in B_i) \\
& \leftrightarrow \forall i(x \in A \vee i \in I \wedge x \in B_i) \\
& \leftrightarrow \forall i \in I(x \in A \vee x \in B_i) \\
& \leftrightarrow \forall i \in I(x \in A \cup B_i) \\
& \quad \leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I}(A \cap B_i).
\end{aligned}$$

由外延公理，

$$A \cup \bigcap_{i\in I} B_i = \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i).$$

五、一般的笛卡尔乘积

在前面讨论两个集合 A,B 的笛卡尔乘积时，我们知道，在一般的情况下，$A \times B$ 是不等于 $B \times A$ 的，这表明集合 A,B 的笛卡尔乘积总是有顺序的. 就此意义而言，A,B 的笛卡尔乘积用纯形式的语言严格地说，应当是序偶 (A,B) 的第一坐标对第二坐标的笛卡尔乘积. 然而在这样的假定之下，序偶 (A,B) 的第一、二坐标都

是一般的集合，于是我们可以把(A,B)看成是一个只含有两项的集族. 例如，我们此时可以取$\{0,1\}$作为标集，对集族$(A_i)_{i\in I}$而言，其中，$I=\{0,1\}$，定义$A_0=A, A_1=B$. 下面，我们就在这样的思路下，把笛卡尔乘积扩展为更为一般的情况.

定义 对任意给定的集族$(A_i)_{i\in I}$，记

$$\underset{i\in I}{\times} A_i = \{(a_i)_{i\in I} \mid \forall i \in I(a_i \in A_i)\}$$

为一集合，并称为集族$(A_i)_{i\in I}$的项的笛卡尔乘积.

在上述定义中，$(a_i)_{i\in I}$本身事实上也是一个族，其中的每一项a_i都是在$i\in I$时，从相应的A_i中取元素来构成的，这样形成的$(a_i)_{i\in I}$往往是很多的. 例如，我们令$I=\{0,1,2\}$，集族$(A_i)_{i\in I}$一定是由A_0，A_1和A_2三个项构成的. 现在，我们用a_{ij}记从A_i中取第j个元素，那么，

$$(a_{01}, a_{11}, a_{21}),$$
$$(a_{01}, a_{12}, a_{21}),$$
$$(a_{01}, a_{11}, a_{22}),$$
$$\cdots\cdots$$

它们都是$\{(a_i)_{i\in I} \mid \forall i\in I(a_i\in A_i)\}$的元素，这样的元素随集族$(A_i)_{i\in I}$项的增多往往是更为快速地增加，因此数量通常是众多的.

现在，上述定义的一个重要的问题是：由所有这样的族$(a_i)_{i\in I}$所构成的集合（即笛卡尔乘积）是否是一个合法的集合？或者说上述定义中的$\underset{i\in I}{\times} A_i$作为集合而存在是否具有充分的保证？

事实上，由于每个$(a_i)_{i\in I}$都是定义在标集I上的函数，其值a_i都是取自$A_i\subset\bigcup\limits_{i\in I} A_i$，所以，对每个$(a_i)_{i\in I}$，都有

$$(a_i)_{i\in I} \in (\bigcup_{i\in I} A_i)^I,$$

即，都是由I到$(A_i)_{i\in I}$诸项并集的映射中的元素，显然，这个映射或者函数集就是我们所需要的包容集. 因此，由子集公理，$\underset{i\in I}{\times} A_i$

的存在肯定是合法的，并且由给定条件的唯一性，这样的集合对每一个给定的条件来说都是唯一的. 下面，我们来看几个一般的笛卡尔乘积的特例.

例 1 若在 $\underset{i\in I}{\times} A_i$ 中，令 $A_i = A$，则记

$$\underset{i\in I}{\times} A_i = \underset{i\in I}{\times} A.$$

此时，"$=$"右边的"$\times$"依然表明是笛卡尔乘积，而"$i \in I$"此时的作用只在于表明集合 A 所有的个数. 故上式也可简单地记为

$$\underset{i\in I}{\times} A_i = \underset{i\in I}{\times} A = A^I$$

例 2 给定集族$(A_i)_{i\in I}$，并给定 $J \subseteq I$，则 J 对$(A_i)_{i\in I}$ 的限制 $(I \mid J)$ 可记为

$$(A_i)_{i\in J}.$$

利用限制，我们可以建立起一些重要的函数，如投影函数. 考虑映射

$$F: \underset{i\in I}{\times} A_i \to \underset{i\in J}{\times} A_i,$$

定义 $F((a_i)_{i\in I}) = (a_i)_{i\in J}$. 那么，我们称 F 是 $\underset{i\in I}{\times} A_i$ 到 $\underset{i\in J}{\times} A_i$ 上的一个投影函数. 例如，令 $I = \{0,1,2\}$，$J = \{0,1\}$，或者 $J = \{0,2\}$，或者 $J = \{1,2\}$，那么 F 就都是由三维空间到二维空间的投影函数. 对任意的$(a_{0x}, a_{1y}, a_{2z}) \in \underset{i\in i}{\times} A_i$ 都有

当 $J = \{0,1\}$ 时，$F(a_{0x}, a_{1y}, a_{2z}) = (a_{0x}, a_{1y})$；

当 $J = \{0,2\}$ 时，$F(a_{0x}, a_{1y}, a_{2z}) = (a_{0x}, a_{2z})$；

当 $J = \{1,2\}$ 时，$F(a_{0x}, a_{1y}, a_{2z}) = (a_{1y}, a_{2z})$.

六、关于象和原象的几个性质的推广

1. 设 $F: X \to Y$，并且 $A: I \to \wp(X)$，那么，有

$$F(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} F(A_i).$$

即，集族诸项并的象等于它们象的并.

证明：因为 $A:I\to\wp(X)$，所以 $A_i\subseteq X$. 故对任意 x，有 $x\in A_i\to x\in X$，并且有 $x\in A_i\to F(x)=y\in F(A_i)$. 而对由此确定的任意 y 都有

$$
\begin{aligned}
& y\in F(\bigcup_{i\in I}A_i)\\
&\leftrightarrow \exists x(x\in(\bigcup_{i\in I}A_i)\wedge y=F(x))\\
&\leftrightarrow \exists x(\exists i(i\in I\wedge x\in A_i)\wedge y=F(x))\\
&\leftrightarrow \exists x\exists i(i\in I\wedge x\in A_i\wedge y=F(x))\\
&\leftrightarrow \exists i(i\in I\wedge \exists x(x\in A_i\wedge y=F(x)))\\
&\leftrightarrow \exists i(i\in I\wedge y\in F(A_i))\\
&\leftrightarrow y\in\bigcup_{i\in I}F(A_i).
\end{aligned}
$$

由外延公理，

$$F(\bigcup_{i\in I}A_i)=\bigcup_{i\in I}F(A_i).$$

以上证明的过程，是不断地应用象的定义、集族的并的定义的过程. 下面几个性质的证明与此是大致相似的，故证明留给读者作为练习使用.

2. 设 $F:X\to Y$，并且 $A:I\to\wp(X)$，$I\neq\varnothing$ 那么，有

$$F(\bigcap_{i\in I}A_i)\subseteq\bigcap_{i\in I}F(A_i),$$

并当 F 为单叶函数时，有

$$F(\bigcap_{i\in I}A_i)=\bigcap_{i\in I}F(A_i)$$

成立.

3. 设 $F:X\to Y$，并且 $C:I\to\wp(Y)$，那么有

$$F^{-1}(\bigcup_{i\in I}C_i)=\bigcup_{i\in I}(F^{-1}(C_i)).$$

4. 设 $F:X\to Y$，并且 $C:I\to\wp(Y)$，$I\neq\varnothing$，那么，有

$$F^{-1}(\bigcap_{i\in I}C_i)=\bigcap_{i\in I}(F^{-1}(C_i)).$$

思考与练习

1. 证明:若以$(x,y,z)=\{\{x\},\{x,y\},\{x,y,z\}\}$作为序叁的定义,那么,它不能满足

$$(x,y,z)=(u,v,w)\leftrightarrow x=u\wedge y=v\wedge z=w$$

的要求,并且不能由此建立序叁之间的相等关系.

2. 证明:若以$(x,y,z)=\{(x,y),\ z\}$作为序叁的定义,那么

$$(x,y,z)=(u,v,w)\leftrightarrow x=u\wedge y=v\wedge z=w.$$

3. 证明:不存在包含一切序偶的集合.

4. 证明:(1)$A\times B=A\times C\wedge A\neq\varnothing\rightarrow B=C$;(2)$A\times A=B\times B\rightarrow A=B$.

5 证明:给定集合A和集组M,那么,

(1)$C=\{A\times\alpha\mid\alpha\in M\}$是集合;(2)$A\times\bigcup(M)=\bigcup(C)$.

6. 证明:给定集合A,B,那么,(1)$C=\{\{x\}\times B\mid x\in A\}$是集合;(2)$A\times B=\bigcap(C)$.

7. 证明:设R是一个关系,那么,$\bigcup(\bigcup(R))=\mathrm{dom}(R)\cup\mathrm{ran}(R)$.

8. 设Π是集合A的一个分类,并且如下定义A中的关系R:$xRy\leftrightarrow x,y\in\Pi$中的同一类.证明:$R$是集合$A$中的一个等价关系.

9. 设R是集合A中的关系.证明:

(1)R是自返的$\leftrightarrow I_A\subseteq R$($I_A$是$A$中的等于关系);

(2)R是对称的$\leftrightarrow R^{-1}=R$;

(3)R是传递的$\leftrightarrow R\cdot R\subseteq R$;

(4)R是传递且自返的$\rightarrow R\cdot R=R$.

10. 设S,T是关系,证明:

(1)$(S\cup T)^{-1}=S^{-1}\cup T^{-1}$;(2)$(S\cap T)^{-1}=S^{-1}\cap T^{-1}$.

11. 设f,g都是函数集,证明:

(1)$f\subseteq g\leftrightarrow\mathrm{dom}(f)\subseteq\mathrm{dom}(g)\wedge\forall x\in\mathrm{dom}(f)(f(x)=$

$g(x)$);

(2)$f \cap g$ 是函数；

(3)$f \cup g$ 是函数 $\leftrightarrow \forall x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)(f(x) = g(x))$.

11. 证明:不存在包含一切函数集的集合.

12. 证明:如果 $X = \varnothing$ 或者 $Y \neq \varnothing$,则 $Y^x \neq \varnothing$.

13. 证明:若 $Y^X = X^Y$,那么,$X = Y$.

14. 证明:空集 $\varnothing$ 是函数,并且是单叶函数.

15. 证明:若存在一个从 X 到 Y 内的非单叶映射,则 $X \neq \varnothing$ 且 $Y \neq \varnothing$.

16. 证明:若存在一个从 X 到 Y 内的非满占映射,则 $Y \neq \varnothing$.

17. 构造一个从$\{a,b,c,d\}$ 到$\wp(\wp(\wp(\varnothing)))$ 上的双射,并写出它的反函数集.

18. 证明:设 $f:X \to Y$;$g:Y \to X$,那么,

(1) 若 $g \cdot f = I_X$(I_X 为 X 上的恒等映射),则 f 是单射并且 g 是满射;

(2) 若 $g \cdot f = I_X$,并且 $f \cdot g = I_Y$,则 f,g 都是双射并且 $g = f^{-1}$.

19. 证明:如果 $f:X \to Y$ 是双射,那么,

(1)$f^{-1} \cdot f = I_X$;

(2)$f \cdot f^{-1} = I_Y$.

20. 设 $A_i = i$,对于每个 $i \in 3$,写慰集族$(A_i)_{i \in 3}$ 和笛卡尔积 $\underset{i \in 3}{\times} A_i$.(提示:这里有 $0 = \varnothing, 1 = \{0\}, 2 = \{0,1\}$.)

21. 给定集族$(A_i)_{i \in I}$ 和集族$(B_j)_{j \in J}$. 证明:

$(\bigcup_{i \in I} A_i) \times (\bigcup_{j \in J} B_j) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i \times B_j)$

第五章　集合的数学模型
——自然数集

集合理论的意义，在于它以纯形式的语言对现实的描写，而集合论要求这样的描写不但是准确的，并且是不会导致矛盾的．假如集合理论不能做到这一点，那么无论我们所建立起来的这种理论有多么的严谨，多么的精妙绝伦，它仍然不过是纸上谈兵，文字游戏而已．在本章的介绍中，我们以自然数为对象，从集合的角度去构造自然数，把自然数之间的关系，完整地还原为集合之间的关系，有限地揭示集合论的诱人的魅力．

第一节　引言

一、自然数发展史中的两个事实

在人类有文字记载的历史中，自然数的出现几乎可以上溯近万年，这表明在很久以前，自然数就已经成为人们生活实践中离不开的重要观念．人们在很早以前就开始利用自然数进行计算，并且在计算中大量地使用了一些重要的运算规律等．但不可思议的是，这些运用都是建立在对自然数及其运算规律的直观理解的基础之

上的，并且这样的状况一直延续到19世纪中叶．换言之，直到19世纪中叶，没有人认真地过问过我们所使用的自然数定义是否是合理的，也没有人过问过我们所使用的自然数的种种运算律是否是合理的．这显然是既不符合理论科学的精神更不符合逻辑的．

从19世纪后半叶开始，数学公理化的思想逐渐地为数学界所接受．1889年，皮亚诺(Peano)第一个给出了严格的皮亚诺公理体系，通过在该体系中建立的关于顺序、运算等定义，自然数的各种基本性质才得以证明．但是，在该体系中，自然数仍然是作为一个不加定义的概念来使用的．从数学的角度来说，尽管皮亚诺公理体系不失为一个好的数学体系，但要想把自然数理论进而是整个数学理论“还原”或者“归结”为集合理论，合理地给出自然数定义，并且把自然数之间的种种关系归结为集合之间的关系就是必须要做的事情了．

1921年，纽曼(Neumann)第一个在集合论的基础上为自然数给出了定义，这就是我们在下面所要介绍和讨论的主要内容．

二、自然数集合化的基本问题

我们以下所要讨论的自然数，是指0,1,2,3等整数．从集合的观点来看，需要事先处理好以下两个基本问题．

首先，我们必须回答什么是数0?什么是数1,2,3等这些我们早已司空见惯的具体的自然数．事实上，当我们在集合论中给出空集定义后，这样的问题似乎是肯定地已经能够解决的了．例如，人类最初对0的认识是“空无所有”(当然，这里的0是自然数的0，而不是有理数或者实数的0)，即使到今天，小学生对0的认识依然是如此引进的．既然如此，在集合中用不包含任何元素的空集 $\varnothing$ 来定义0就是最自然不过的事情了，即可定义

$$0=\varnothing.$$

依照这样的思维方式，用只含有一个元素的单元集来定义 1，当然也是合理的. 那么，有这样的集合吗？由空集公理和偶集公理，$\{\varnothing\}$，$\{\{\varnothing\}\}$，$\{\{\{\varnothing\}\}\}$ 等都是可以接受的合法集合，不妨取其中最为简单的一个，故 1 可定义为

$$1 = \{\varnothing\}.$$

类似地，可以定义出

$$2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\},$$

$$3 = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$$

等. 上述的定义过程表明，我们以空集公理和偶集公理为基础，从经验上看，我们总能以 1，2，3 等这些自然数作为单元集、偶集和三元集等的抽象，而公理的意义就在于能保证由此抽象的集合都是合法的集合.

其次，是我们该怎样去定义一切的自然数？或者说该怎样去定义任意的某个自然数呢？上述对 0，1 等自然数的定义都是无可非议，但若以为就能以此方式类推地定义一切自然数，显然就有问题了. 首先是没有任何人能在有生之年或者数代人之后能以此方式定义完一切自然数；其次是以此类推的这种定义方式，仅仅在理论上是可能的，而在实践中并不具有可操作性. 例如以上定义 3 的集合就已经变得较为复杂了，假如要以此方式定义 100 的话，定义集显然是非常繁琐的，因此，这样的结果对人们的实践来说也不具有应用性；最后，是以此类推的定义方式，随着自然数的增大，其结构也会越来越复杂，谁也不能保证所有过程的准确性，因此，在这样的定义方式下，谁也不能保证我们所使用的每一个自然数都是经过了定义，并且每一个自然数的定义都是正确的. 从逻辑上说，这显然是一种荒谬：我们正使用一个或者内涵不明确，或者根本上就是错误的对象，去说明一个我们需要清楚地加以明确的对象.

下面，我们的讨论，就是希望能用明确的集合论的形式语言，去定义自然数，使得一切自然数，无论是我们在什么时候、什么地

方所需要应用的任何自然数，都在该形式语言中有自己清楚明确的定义.

先回顾一下关于 0,1 等的定义过程，并使用我们已经具备的集合论方法对它们的结构作适当的变化，对以下的讨论将是非常有益的.

在上述定义中，我们有

$$0 = \varnothing;$$
$$1 = \{\varnothing\};$$
$$2 = \{\varnothing,\{\varnothing\}\};$$
$$3 = \{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}.$$

由偶集和并集公理，不妨把它们分别改写为

$$0 = \varnothing;$$
$$1 = \varnothing \cup \{\varnothing\};$$
$$2 = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\};$$
$$3 = \{\varnothing,\{\varnothing\}\} \cup \{\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}.$$

现在，我们把在前面完成了的定义依次代入后面的定义式中，有

$$0 = \varnothing;$$
$$1 = 0 \cup \{0\};$$
$$2 = 1 \cup \{1\};$$
$$3 = 2 \cup \{2\}.$$

上述的定义方式表明，我们在集合中定义自然数时离不开以下两个条件：

1. 空集 $\varnothing$ 必须在这个集合中，否则我们的定义没有可依赖的理论基础；

2. 如果元素 a 属于我们所定义的集合，那么 $a \cup \{a\}$ 也应当属于这个集合.

并且，在对自然数的定义过程中仅有以上两点还是不够的. 因

为，虽然空集是唯一的，但单元集，偶集等在形式上都不具有唯一性. 例如，$\{\varnothing\}$，$\{\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$，$\{\{\{\varnothing\},\{\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}\}\}$ 等都是单元集，我们有什么充分的理由用其中的$\{\varnothing\}$ 去定义"1"，而排斥掉其他的任何一个呢?这样的排斥是否会带来逻辑上的矛盾呢?所以，仅凭上述两点还不足以说明这些问题，而这些问题是我们在下述讨论中要重点讨论的主要内容之一.

第二节　自然数集

一、后继者定义

定义　对于集合 a，记 $a\bigcup\{a\}$ 为一集合，并称为 a 的后继者. A 的后继者我们以后记为 a^+，即

$$a^+=a\bigcup\{a\}.$$

例如，设

$$0=\varnothing,$$

则

$$0^+=\varnothing\bigcup\{\varnothing\}=0\bigcup\{0\}=1;$$
$$1^+=\{\varnothing\}\bigcup\{\{\varnothing\}\}=1\bigcup\{1\}=2.$$

一般的，有

$$a^+=a\bigcup\{a\},$$

而

$$a^{++}=(a\bigcup\{a\})\bigcup\{a\bigcup\{a\}\}.$$

由后继者的定义和对定义的有限的列举中我们注意到，有

$$a\subseteq a^+ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

和

$$a\in a^+ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

的同时成立，这表明集合 a 既是 a^+ 的子集，又是 a^+ 的元素. 这同前面介绍的集合理论看起来是有冲突的，似乎会导致集合在层次上的混乱. 这种担心其实是不必要的. 在前面讨论的集合理论在层次上的一个重点是，任何集合都不能成为自己的元素. 后继者的定义

虽然使得一个集合既是其后继者的子集，又是其后继者的元素，但并不因此存在导致某一集合成为自己元素的可能性. 由上述公式 ① 和 ② 所反映的后继者的特征，当且仅当在公式 ① 中，有 $a = a^+$ 时，才能导致 $a \in a$，但在后面的证明中我们会看到，任何集合都不可能与其后继者相等，这就等于说，由后继者的特征导致集合层次方面的混乱是不可能的. 而包含在集合后继者中的集合的这一双重性，使得对自然数集的讨论，特别是对一般的序数集的讨论会带来许多方便.

定理 $\varnothing$ 不是任何集合的后继者.

证明：定理相当于说，任何集合的后继者都不会是空集 $\varnothing$. 对任一给定的集合 a 和后继者定义，显然有

$$a \in a^+,$$

这足以表明，a^+ 不可能是空集 $\varnothing$.

二、归纳集

定义 对任意给定的集合 A，当且仅当满足条件

1. $\varnothing \in A$;

2. $\forall a(a \in A \rightarrow a^+ \in A)$,

那么，称集合 A 是一个归纳集.

归纳集留给我们的第一印象应该是它的元素的起始性和无穷性. 它一定有一个开头的元素即 $\varnothing$；它也不可能有某个"最后"的元素以表示终结，因为条件 $\forall a(a \in A \rightarrow a^+ \in A)$ 是一个使其元素永无终结的条件.

"无穷"历来是哲学、基础数学发生争论的一个重要场合. 在历史上，"无穷"被区分为"潜无穷"和"实无穷"两种，反映了人们对"无穷"的两种不同的认识方法. 所谓"潜无穷"，是把对无穷多的对象的认识看成是一种过程，一种永无终止的过程来加以认识

的方式.持此观点的最早代表人物是亚里士多德,他是历史上明确区分“潜无穷”和“实无穷”的第一人.如果以“潜无穷”的方法来定义自然数,就会出现本章第一节最初对自然数的定义方式,这是一个没完没了的定义过程.在这样的过程中,人们只能凭借已经发生了的事实来获得对无穷的有限的认识.尽管在历史中相当长的时间里,甚至直到 19 世纪“潜无穷”都在数学中占有主导地位,但由于以此方式对无穷所产生的认知是不可靠的,因此,它最终还是会让位于“实无穷”的方法.而所谓“实无穷”,则是把对无穷多的对象的认识看成是一种已经形成了的完整对象来加以认识、把握的方式.如从集合角度对自然数的定义,对归纳集的认识等都是如此.持“实无穷”的最早代表人物是柏拉图,但从古希腊以来,人们在大多数时间里都接受“潜无穷”而拒绝“实无穷”,这是因为人们在实践中感受到的大多是有限的事物,思维、认识方法都受制于这样的直观感受性.同时,由于“实无穷”的认知观在方法上不成熟,因此,不能说明在实践中引出的许许多多看似矛盾的结论,如部分和全体的“同样多”等.到 19 世纪康托尔集合理论产生之前,科学界特别是数学界普遍地接受“潜无穷”而拒绝“实无穷”这完全是可以理解的.康托尔集合理论的重要贡献之一,就是他证明了具有无穷多元素的集合的存在,并把它们作为一个整体加以表述、讨论、研究.此后的科学特别是数学的发展证明了康托尔集合论的宝贵价值,证明了无穷集存在的合理性,使人们从“潜无穷”的认知观走向“实无穷”的认知观,也标志着人类的认识方法、能力由此跃上了一个新的台阶.

无穷公理　至少存在一个归纳集.

肯定归纳集的存在,等于说承认了一种特殊类型的“无穷集”的存在.之所以只能是“等于说”,是因为“无穷集”的定义还需要做一些其他方面的工作后才能给出.下面,我们首先利用无穷公理来证明自然数集的存在.

定理　存在唯一的集合 ω，恰好包含所有的属于每个归纳集的元素.

证明:从无穷公理所肯定存在的归纳集中任取一个记为 A_1，令 A_1 为 ω 的包容集;另设定条件

$$C(n) = \forall A(n \in A \leftrightarrow (\varnothing \in A \wedge \forall a(a \in A \rightarrow a^+ \in A))).$$

显然，上述条件中的集合 A 是一归纳集，那么，由子集公理，存在集合 ω，使得

$$\omega = \{n \in A_1 \mid \forall A(n \in A \leftrightarrow (\varnothing \in A \wedge \forall a(a \in A \rightarrow a^+ \in A)))\}.$$

由于 A_1 实际上已经是任意的集合 A 中的某一个，因此，有

$$\omega = \{n \mid \forall A(n \in A \leftrightarrow (\varnothing \in A \wedge \forall a(a \in A \rightarrow a^+ \in A)))\}.$$

显然，由子集公理，集合 ω 不但存在，并且由所设的条件 $C(n)$ 的唯一确定性，这样的集合 ω 也必定是唯一的.

定义　设条件 $C(n) = \forall A(n \in A \leftrightarrow (\varnothing \in A \wedge \forall a(a \in A \rightarrow a^+ \in A)))$，记

$$\omega = \{n \mid n \in \omega \leftrightarrow C(n)\}$$

为一集合，并称之为自然数集，它的每一元素都称之为自然数.

以“潜无穷”的方法或者说以列举的方法去确定全体自然数是不可能的. 但在子集公理的基础上，在给定的包容集中，我们可以用条件 $C(n)$ 一下子确定出这样一个集合:任何满足 $C(n)$ 的集合都是它的元素，而不满足的则都被排斥在外从而不能成为该集合的元素. 定义的意义在于，通过无穷公理，我们实际上构造了一个不能再小的归纳集，它排除了一切多余的元素，成为任何一个归纳集的子集. 下面的定理就是对这种意义的确认.

定理　ω 是最小的归纳集.

证明:我们首先证明 ω 是归纳集.

1. $\varnothing \in \omega$. 因为 $\varnothing$ 属于每个归纳集，由 ω 的存在性证明，$\varnothing \in \omega$.

2. $\forall n(n \in \omega \rightarrow n^+ \in \omega)$. 这是因为，对任意的自然数 n，都有

$$\begin{aligned} n \in \omega &\rightarrow n \in \text{每一个归纳集} \\ &\rightarrow n^{+} \in \text{每一个归纳集} \\ &\rightarrow n^{+} \in \omega, \end{aligned}$$

由归纳集定义，ω 是归纳集.

假设还存在归纳集 A，使得 $A \subseteq \omega$，那么由 A 是归纳集和 ω 的存在性证明，一定有 $\omega \subseteq A$，再由子集的定义和外延公理，必然有 $A = \omega$，即在给定条件下，ω 只能是唯一的.

综上所述，定理得证.

整理以上讨论的过程和得到的结论，即如果我们承认有归纳集存在，那么 ω 就是所有的归纳集的交集，也就是最小的归纳集. 理解并记住这些结论对下述的讨论是非常有益的. 以后，我们把符号 ω 作为自然数集的专用符号来使用.

三、归纳原理

定理 设集合 $A \subseteq \omega$，并且

1. $0 \in A$;
2. $\forall n \in \omega(n \in A \rightarrow n^{+} \in A)$.

那么，$A = \omega$.

证明：由已知的条件 1,2，归纳集定义，A 是归纳集，故 $\omega \subseteq A$；但已知 $A \subseteq \omega$，由子集的定义和外延公理，必然有 $A = \omega$.

本定理也称为归纳原理. 在数学研究中，数学归纳法是一种广泛使用的非常重要的方法，而归纳原理就是数学归纳法的基础. 数学归纳法我们通常表达为：

设 $C(n)$ 是关于 $n \in \omega$ 的一个条件，那么，如果

1. $n = 0$ 时，$C(n)$ 成立；
2. $C(n)$ 成立 $\rightarrow C(n^{+})$ 也成立，

则对一切的 $n \in \omega$，$C(n)$ 都成立.

对数学归纳法的证明，我们只需要在 ω 中去构造一个子集 A，使得

$$A = \{n \mid n \in \omega \land C(n)\},$$

由子集公理，这样的集合 A 总是存在的，然后，我们只需要去证明 $A = \omega$ 就可以了.

以上讨论可以说首先是建立在后继者这个概念基础之上的. 而在下面的讨论中，我们还将使用另一个概念即"先行者".

定义 设 $m, n \in \omega$，对于 $n \neq 0$，称使得 $m^+ = n$ 的 m 为 n 的先行者，记为

$$m = n^-.$$

比较后继者和先行者的定义，不难发现，0 不是任何自然数的后继者，因此，0 也没有先行者.

定理 对于任意的自然数 $n \neq 0$，存在一个自然数 m，使得

$$m^+ = n.$$

定理实际上表达的是，任意的非 0 自然数都存在先行者.

证明：我们利用归纳原理来证明这一定理. 先构造集合

$$A = \{0\} \cup \{n \mid n \in \omega \land \exists m \in \omega(m^+ = n)\},$$

其中，集合 $\{n \mid n \in \omega \land \exists m \in \omega(m^+ = n)\}$ 是由那些具有先行者的自然数构成的，由子集公理，集合显然是合法的. 下面，我们证明 $A = \omega$.

1. $0 \in A$. 由 A 集的构造，这是显然的.

2. 现在设 $n \in A$，即设 $\exists m \in \omega(m^+ = n)$ 为真，考虑 n^+.

由于自然数集是归纳集，故当 $m \in \omega$ 时，则 $m^+, m^{++} \in \omega$，这就意味着，如果 $n \in A$，那么，一定 $\exists m \in \omega(m^+ = n)$，由

$$m^{++} = m^+ \cup \{m^+\},$$

$$n^+ = n \cup \{n\} = m^+ \cup \{m^+\},$$

有

$$m^{++} = n^+$$

必定为真，故 $n^+ \in A$. 由归纳原理，

$$A = \omega.$$

即，任意的非 0 自然数都存在先行者.

四、传递集

自然数集 ω 由其定义和因此引出的相关概念，较一般的集合来说，有其自身的特殊性，如上面讨论过的归纳性及以下将要介绍的传递性等. 集合论所关心的是，这些特殊性在集合论的讨论中是否会引发逻辑矛盾？下面，我们通过对传递性的介绍和一系列的定义、定理的建立、证明，来说明 ω 是一个不矛盾的系统.

定义　对任意给定的集合 B，当且仅当 B 的任何元素的元素仍然是 B 的元素，即有

$$\forall x \forall y(y \in x \land x \in B \rightarrow y \in B)$$

始终为真，则称集合 B 是一个传递集.

上述定义中的传递性是没有限制的，B 的任何元素的元素仍然是 B 的元素，就不能阻挡 B 的任何元素的元素的元素还是 B 的元素. 这表明传递集完全可能是无穷集.

定理　任何一个自然数集都是传递集.

分析：在自然数 0,1,2,3 等的定义中，注意到都有若 n 是自然数，则有 $n \in n^+$ 并且 $n \subseteq n^+$ 这一特征. 这表明它们都具有自然数的元素的元素仍然属于该自然数的性质. 现在需要回答的是，是否一切自然数都具有这样的性质.

证明：构造集合 $A = \{n \in \omega \mid \forall x \forall y(y \in x \land x \in n \rightarrow y \in n)\}$，即集合 A 是由一切能够成为传递集的自然数构成的集合，由上述分析，这样的集合 A 肯定是存在的，下面证明 $A = \omega$.

1. $0 \in A$.

这是因为，$0 = \varnothing$、而对任意的元素 x，$x \in \varnothing$ 恒为假，所以

$$\forall x \forall y(y \in x \wedge x \in 0 \rightarrow y \in 0)$$
恒为真. 即 0 总能满足集 A 元素的条件.

2. 设 $n \in A$,即假设 $\forall x \forall y(y \in x \wedge x \in n \rightarrow y \in n)$ 为真,现在考虑 n^{+}.

由后继者的定义,如果对任意的元素 x,y,都有
$$y \in x \wedge x \in n^{+} \leftrightarrow y \in x \wedge x \in n \cup \{n\},$$
故或者有
$$y \in x \wedge x \in n,$$
或者有
$$y \in x \wedge x = n,$$
但无论是那种情况,由归纳假设,都有
$$y \in n.$$
但由后继者的特征,
$$n \subseteq n^{+},$$
所以,
$$y \in n^{+}.$$
即有
$$y \in x \wedge x \in n^{+} \rightarrow y \in n^{+}$$
成立,由归纳原理,$A = \omega$. 即 ω 中任一自然数都是一个传递集.

上述证明,实际上也说明了任何一个自然数的元素都是它的一个子集,这同我们在建立自然数集合时观察到的事实和证明之前的分析是一致的. 但要注意的是,定理的逆即"任意自然数的子集都是它的元素"是不一定成立的. 例如,$3 \subseteq 3$,但 $3 \notin 3$. 因为 $3 = \{0,1,2\}$. 又如 $\{0,2\} \subseteq 3$,但同样有 $\{0,2\} \notin 3$. 所以,自然数尽管较为特殊,但它仍然是需要遵守集合的一般原则的,即任何集合都不能是自己的元素. 下面,我们用定理推论的形式在自然数集中来确定这一原则.

推论 对于任意自然数 n,都有 $n \notin n$.

证明：构造集合 $A=\{n\in\omega \mid n\notin n\}$，即 A 是由一切不能属于自己的自然数构成的集合. 由前分析，属于这样的集合 A 的元素肯定是存在的，如上述中的 3. 下面证明 $A=\omega$.

1. $0\in A$.

这是因为 $0=\varnothing$，由空集公理，$\varnothing\notin\varnothing$，即 $0\notin 0$.

2. 设 $n\in A$，即假设 $n\notin n$ 为真，考虑 n^+.

由集合元素都应当具有确定性，我们采取反证法. 设 $n^+\in n^+$，则由后继者定义，有

$$n^+\in n\cup\{n\}.$$

所以，或者有 $n^+\in n$，但由后继者定义，有 $n\in n^+$，再由自然数都是传递集，所以有 $n\in n$；或者有 $n^+=n$，但同样由所设 $n^+\in n^+$，也有 $n\in n$. 可见，只要假设 $n^+\in n^+$，就一定推出 $n\in n$，总与归纳假设相矛盾，故假设不正确，即 $n^+\in n^+$，从而 $n^+\in A$. 由归纳原理，$A=\omega$，即任一自然数都不能属于自己.

上述推论用公式可表示为

$$\forall n\in\omega\forall x\in n(x\subset n).$$

即，符号“$\subset$”表示，任意自然数的元素都只能是该自然数的真子集.

定理　自然数集 ω 是传递集.

前面，我们已经证明了任何一个自然数都是传递集，要证明自然数集 ω 本身也是传递集，只需要我们去构造一个传递集，然后去证明这个集合就等于自然数集就可以了.

证明：构造集合 $A=\{n\in\omega \mid \forall x(x\in n\rightarrow x\in A)\}$，由传递集定义，$A$ 显然是一个传递集. 下面，我们证明 $A=\omega$.

1. $0\in A$.

因为在集合 A 的元素的条件中，若令 $n=0$，则由 $x\in 0$ 恒为假，因此条件

$$\forall x(x\in 0\rightarrow x\in A)$$

的值恒为真，故 $0 \in A$.

2. 设 $n \in A$，即假设 $\forall x(x \in n \to x \in A)$ 为真，考虑 n^+.

由后继者的定义，如果对任意的元素 x 都有

$$x \in n^+ \leftrightarrow x \in n \cup \{n\},$$

故或者有

$$x \in n,$$

或者有

$$x = n,$$

但无论是那种情况，由归纳假设，都有

$$x \in A.$$

可见，只要 $x \in n^+$，就一定有 $x \in A$，即 $\forall x(x \in n^+ \to x \in A)$ 为真，故 $n^+ \in A$，由归纳原理，$A = \omega$. 即自然数集 ω 是传递集.

现在，把上述介绍的定义、定理联系起来，从集合角度，考察的自然数集 ω 和自然数 $n \in \omega$ 的概念，都应该说是比较清楚了.

第三节　皮亚诺公理体系

作为对逻辑和数学公理体系的先行者的纪念，我们介绍皮亚诺的一个公理体系．该体系是以两个原始概念即自然数集 ω 和 0，加上 5 个公理为主干构成的．5 个公理依次为：

1. $0 \in \omega$；

2. 对任意的 $n \in \omega$，n 都有唯一的后继者 $n^+ \in \omega$；

3. $\forall n \in \omega(n^+ \neq 0)$；

4. $\forall m, n \in \omega(m \neq n \rightarrow m^+ \neq n^+)$；

5. ω 满足归纳原理．

在公理 2 中，包含有一个建立在自然数集上的不定义的映射

$$(\quad)^+ : \omega \rightarrow \omega.$$

通常，这个映射的定义域被我们称为扩大的自然数集（因为包含有 0），而值域则被称为严格的自然数集（不包含有 0）．我们所讨论的自然数集 ω，显然都是扩大的自然数集合．公理 3 至公理 5，实际上就是这个不定义的映射的性质．

在本书的系统讨论中，ω 实际上被定义为最小的归纳集，0 被定义为空集 $\varnothing$，并且对后继者作出了最一般的定义，即 $n^+ = n \cup \{n\}$．这样一来，皮亚诺系统中的各条公理在本书的论述过程中反而都成为可以简单证明的命题了．例如，公理 1 和公理 2 的证明已经被包含在了“ω 是归纳集”的证明之中；公理 3 的证明包含在了已证定理“$\varnothing$ 不是任何集合的后继者”中；公理 5 的证明可归结为归纳原理的证明；而剩下的公理 4 可简单证明如下：

设任意的 $m, n \in \omega$ 并且 $m \neq n$，那么，若 $m^+ = n^+$，由后继者定义，有

$$m \cup \{m\} = n \cup \{n\}.$$

由外延公理，必然有

$$n \in m \cup \{m\} \text{ 并且 } m \in n \cup \{n\}.$$

由 $n \in m \cup \{m\}$，可推出

$$n \in m \text{ 或者 } n = m; \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

由 $m \in n \cup \{n\}$，可推出

$$m \in n \text{ 或者 } m = n. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

由题设，$m \neq n$，故由 1 和 2 可推出

$$n \in m \wedge m \in n. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{③}$$

但已经证明，自然数都是传递集，故由式 ③ 有

$$n \in n \text{ 或者 } m \in m.$$

显然，这些结论无论哪一个都是同我们已经证明过的定理是相矛盾的，所以假设 $m^+ = n^+$ 是错误的，即只要 $m \neq n$，那么一定有 $m^+ \neq n^+$.

公理 4 实际上是说，每个非 0 自然数的先行者也是唯一的. 由任一非 0 自然数的先行者和后继者都是唯一的，说明自然数集中的每个自然数都满足集合元素所要求的唯一性和确定性.

第四节　自然数的顺序

如前所述，无论在我们的一般定义中还是在经验的直觉中，都有

$$0 \in 1,$$
$$1 \in 2,$$
$$2 \in 3$$

等，在本节中，我们就依赖自然数之间的这种关系，来考察自然数的顺序.

一、预备定理

定理 1　$\forall m, n \in \omega (n \in m \leftrightarrow n^+ \in m^+)$.

证明：我们先证明对任意的 $m, n \in \omega (n \in m \rightarrow n^+ \in m^+)$. 构造集合

$$A_n = \{m \in \omega \mid n \in m \rightarrow n^+ \in m^+\},$$

它表示是由 ω 中这样的自然数所构成的集合：如果取定的自然数 n 是它的一个元素，那么 n 的后继数一定是它的后继数的一个元素. 这样的集合 A_n 由子集公理是肯定存在的. 我们只需要证明 $A_n = \omega$ 即可.

1. $0 \in A$.

因为在集合 A_n 的元素的条件中，若令 $m = 0$，则对任意给定的 $n \in \omega$，都有 $n \in 0$ 恒为假，因此条件

$$(n \in 0 \rightarrow n^+ \in 0^+)$$

的值恒为真，故 $0 \in A_n$.

2. 设 $m \in A_n$，即假设对任意给定的 m，都有 $n \in m \rightarrow n^+ \in m^+$ 为真，现在来考察 m^+.

若 $n \in m^+$，则由后继者定义有 $n \in m \cup \{m\}$，那么，或者 $n \in m$，或者 $n = m$.

如果是 $n \in m$，则由归纳假设，一定有 $n^+ \in m^+$；但由 $m^+ \subseteq m^{++}$，故可推出 $n^+ \in m^{++}$.

如果是 $n = m$，则已证 $n^+ = m^+$，同样由 $m^+ \subseteq m^{++}$，依然可推出 $n^+ \in m^{++}$. 可见，只要有 $n \in m^+$，就必然推出 $n^+ \in m^{++}$. 所以在给定条件下，公式

$$n \in m^+ \rightarrow n^+ \in m^{++}$$

的值恒为真，故 $m^+ \in A_n$，由归纳原理，$A_n = \omega$，即自然数集中所有的自然数对任意给定的自然数 n 来说，公式

$$n \in m \rightarrow n^+ \in m^+$$

的值都真.

再证明在上述相同条件下 $n^+ \in m^+ \rightarrow n \in m$ 真.

如果 $n^+ \in m^+$，则有 $n^+ \in m \cup \{m\}$，那么，或者 $n^+ \in m$，或者 $n^+ = m$. 但无论哪种情况，由于 $n \in n^+$，因此由自然数是传递集及外延公理，必然可推出 $n \in m$. 即

$$n \in m \rightarrow n^+ \in m^+$$

在所给条件下总为真.

综上所述，定理一成立.

定理 2　对任意的 $m, n \in \omega$，在 $n \in m$，$m \in n$ 和 $m = n$ 中最多有一个公式为真.

证明：我们采用反证法. 如果

$$n \in m \wedge m \in n,$$

那么，由于自然数都是传递集，必然有

$$n \in n;$$

如果

$$n \in m \wedge m = n,$$

或者

$$n = m \wedge m \in n,$$

那么,由外延公理,都有

$$n \in n.$$

显然,三种情况的结论都与已证定理相矛盾. 这表明,m 与 n 的三种可能的关系中,是两两不相容的,所以,三个公式中,最多只能有一种个公式为真.

定理 3　对任意的 $m, n \in \omega$,在 $n \in m$,$m \in n$ 和 $m = n$ 中至少有一个公式为真.

证明:我们先考虑自然数 0 的情况. 因为对任意 $m \in \omega$,$m \in 0$ 肯定是不成立的,故可构造集合

$$B = \{m \in \omega \mid m = 0 \vee 0 \in m\},$$

表示在自然数集中,对于给定的自然数 0 来说,或者与 0 相等,或者使 0 为其元素的自然数的集合. 我们证明 $B = \omega$.

1. $0 \in B$.

这是显然的,只需要令 $m = 0$ 即可.

2. 设 $m \in B$,即假设对任意的 $m \in B$ 来说,$0 = m \vee 0 \in m$ 为真,现在考虑 m^+.

因为 $m^+ \neq 0$,所以,如果 $m^+ \in B$,只能证明有 $0 \in m^+$. 事实上,由归纳假设,如果 $m = 0$,那么,由 $m \in m^+$,故可推出 $0 \in m^+$;如果 $0 \in m$,同样由 $m \in m^+$,可推出 $0 \in m^+$. 可见,只要归纳假设 $0 = m \vee 0 \in m$ 为真,必然有

$$\forall m^+ \in \omega(0 = m^+ \vee 0 \in m^+)$$

为真,即 $m^+ \in B$,由归纳原理 $B = \omega$. 对任意的自然数 m,

$$0 = m \vee 0 \in m$$

中至少有一个公式真.

下面,我们把上述证明中的 0 换为任意给定的自然数 n 进行

证明. 构造集合

$$A_n = \{m \in \omega \mid n = m \vee n \in m \vee m \in n\},$$

A_n 表示自然数集中那些或者与任意给定的自然数 n 相等，或者以 n 为其元素，或者以 n 的元素出现的自然数的集合. 下面我们证明 $A_n = \omega$.

1. $0 \in A_n$.

由上述证明，这是显然的.

2. 设 $m \in A_n$，即假定对于任意给定的自然数 n，$\forall m \in \omega(n = m \vee n \in m \vee m \in n)$ 为真，现在考察 m^+ 的情况.

由归纳假设，若 $m \in A_n$，则

或者 $n = m$，但 $m \in m^+$，所以，$n \in m^+$ 也成立；

或者 $n \in m$，则同样由 $m \in m^+$，可推出 $n \in m^+$ 成立；

再者 $m \in n$，由已证，必然可推出 $m^+ \in n^+$，因此有 $m^+ \in n \cup \{n\}$，由并集定义，此时或者有 $m^+ \in n$，或者有 $m^+ = n$，但无论是哪种情况，显然都是满足集合 A_n 的元素的条件的.

归纳上述讨论，显然，只要假定 $m \in A_n$，对任意给定的自然数 n，必然有 $n = m^+ \vee n \in m^+ \vee m^+ \in n$ 为真，故 $m^+ \in A_n$. 由归纳原理，$A_n = \omega$. 再由 $n \in \omega$ 的任意给定性，即对任意的自然数 m,n，定理所肯定的三种可能的情况中至少有一种成立为真.

定理 4　对任意的自然数 m,n，n 是 m 的元素当且仅当 n 是 m 的真子集. 即

$$\forall m,n \in \omega(n \in m \leftrightarrow n \subset m).$$

证明：定理的充分性，即 $\forall m,n \in \omega(n \in m \rightarrow n \subset m)$，由本章第二节所证明的推论来看是显然的. 因此下面仅证明定理的必要性，即

$$\forall m,n \in \omega(n \subset m \leftrightarrow n \in m).$$

设 $n \subset m$，由 n,m 之间可能的关系来看，不外乎是 $n = m \vee n \in m \vee m \in n$. $n \subset m$ 表明 $n \neq m$，因此在 $n \in m \vee m \in n$ 中恰好

只有一种情况成立. 但如果是 $m \in n$ 成立, 则有 $m \subset n$, 加上已知、子集定义和外延公理, 必然可推出 $n = m$, 这显然同已知是矛盾的, 故 $m \notin n$, 由已证定理 2 和定理 3, 必然有 $n \in m$ 为真.

综上所述, 定理 4 成立.

二、"小于"关系的定义

定义 对于任意的自然数 m 和 n, 当且仅当 $n \in m$ 时, 称 n 小于 m, 记为

$$n < m.$$

"$<$"作为一种关系, 在自然数集中反映了如下的一个集合:

$$R_{小于} = \{(n,m) \in \omega \times \omega \mid n \in m\}.$$

集合 $R_{小于}$ 由上述定义可以用形式语言描述为

$$\forall m \in \omega \forall n \in \omega (n < m \leftrightarrow n \in m) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

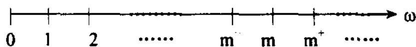
由于 ω 是传递集, 因此有

$$m \in \omega \wedge n \in m \rightarrow n \in \omega,$$

故上面的公式 ① 和下面的公式

$$\forall m \in \omega (\forall n (n \in m \leftrightarrow n \in \omega \wedge n < m))$$

是逻辑等值的. 这表明, 任何一个自然数都是由小于它的一切自然数组成的一个集合. 这由以下的图形来看是非常直观的:



即, m 是由 $0,1,\cdots,m^-$ 构成的集合, 而 m^+ 则是由 $0,1,\cdots,m^-,m$ 构成的集合, 有

$$m = \{n \in \omega \mid n < m\}.$$

上面定义的"小于"关系实际上是为自然数集合中的自然数排定了一种顺序. 对于任意的两个自然数来说, 在这样的顺序链条中都一定具有下述的性质:

三歧性　对任意的$m,n\in\omega$，在$n\in m$，$m\in n$和$m=n$中恰好有一个公式为真.

证明：显然，任意两自然数的三歧性是上述已证定理2，定理3的自然结果.

传递性　对任意的$m,n,o\in\omega$，都有

$$m<n\vee n<o\rightarrow m<o.$$

证明：显然，自然数的传递性是因为自然数都是传递集的自然结果.

以上，我们虽然只定义了"小于"关系，但以此为基础，我们可以相应的定义出"大于"、"不小于"和"不大于"关系.

定义　如果$n<m$，则称m大于n，记为$m>n$；

如果$m>n\wedge m=n$，则称m不小于n，记为$m\geqslant n$；

如果$m<n\wedge m=n$，则称m不大于n，记为$m\leqslant n$.

应当注意的是，在集合论的讨论中，由"小于"关系的最终定义，在自然数集中，不大于关系"$\leqslant$"同包容于关系"$\subseteq$"应当是同义的，因此是可通用的.

第五节　最小数原理

数学中的实数集合、整数集合等都可以说是在自然数集合的基础上发展起来的. 但是,有的特征却仅仅是自然数才能独有的. 如以下介绍的最小数问题. 在本节的讨论中,我们从集合的角度来讨论这一特征.

一、最小数定义

定理　如果自然数 n 小于自然数 m,那么,$n^+ \leqslant m$.

证明:若 $n < m$,由小于的定义,当且仅当 $n \in m$. 再由已证,$n^+ \in m^+$,即有

$$n^+ \in m \cup \{m\},$$

所以有

$$n^+ \in m \text{ 或者 } n^+ = m,$$

即有

$$n^+ \in m \vee n^+ = m,$$

由"$\leqslant$"定义,有

$$n^+ \leqslant m.$$

上述定理的意义在于,它断定了在任意自然数 n 及其后继者 n^+ 之间,都不存在其他的任何自然数. 这是自然数集元素之间的一种特有的关系.

定义　设 $A \subseteq \omega$,当且仅当存在 $n_0 \in A$,使得对任意的 $n \in A$,都有 $n_0 \leqslant n$,则称 n_0 是集 A 的最小数.

定义相当于说,任何一个自然数集的子集包括自然数集 ω 本

身，如果存在满足条件的元素 n_0，那么 n_0 就是该集合的最小数. 例如对自然数集 ω 而言，0 不大于它的任何一个元素，因此 0 就是它的最小数.

定理 自然数集 ω 及其任何一个子集，如果存在最小数 n_0，则 n_0 必定是唯一的.

证明：设 A 是 ω 的任一子集，若最小数不是唯一的，则可设 n_0，n 都是 A 的最小数. 那么由最小数的定义，一定有 $n_0 \leqslant n$，并且 $n \leqslant n_0$. 由"不大于"的定义，此即 $n_0 \subseteq n$ 并且 $n \subseteq n_0$. 由子集定义和外延公理，必然有 $n_0 = n$. 即对 ω 的任一子集来说，最小数若存在，它都只能是唯一的.

二、最小数原理

上面我们定义了最小数，并证明了它对自然数集 ω 及其任意子集 A 的唯一性. 但 ω 及其任意子集 A 的最小数是否存在，这是定义并不能保证的. 下面我们有定理来保证这一点.

定理（最小数原理） 由自然数组成的任意非空集合，一定都存在最小数.

定理相当于说，任何一个自然数集的子集包括自然数集 ω 本身，都一定存在某个满足条件的元素 n_0，并且 n_0 就是该集合的最小数.

证明：设集合 $A \subseteq \omega$，并且 $A \neq \varnothing$.

首先，我们假定集合 T 是由不大于集合 A 的任何元素的所有自然数构成的集合，即

$$T = \{m \in \omega \mid \forall n \in A(m \leqslant n)\}.$$

这样的集合 T 从子集公理来说肯定是合法的，并且 $T \neq \varnothing$，因为至少有一个元素 0 属于 T. 我们首先证明，$T \neq \omega$. 这是因为集合 $A \neq \varnothing$，所以一定存在自然数 $n \in A$，现在取 $n^+ > n$，可见，有自

然数 $n^+ \in \omega \wedge n^+ \notin T$，所以 $T \neq \omega$.

其次，存在 $m_0 \in T$，使得 $m_0^+ \notin T$.

这是因为，$0 \in T$ 是显然的. 若对任意的 $m_0 \in T$，一定能推出 $m_0^+ \in T$，那么 T 必然是归纳集. 并且由 T 的构造方式，必然有 $T = \omega$，这与上面的证明结果是矛盾的. 因此必然有 $m_0 \in T$，使得 $m_0^+ \notin T$.

最后，我们能够证明，上面证明存在的 m_0，就是集合 A 的最小数.

这是因为，由 $m_0 \in T$ 和集合 T 元素的条件，对任意的 $n \in A$，都有 $m_0 \leqslant n$，可见，现在我们只要能够证明 $m_0 \in A$ 就可以了. 由集合元素的确定性，如果 $m_0 \notin A$，即在集合 T 中 m_0 所满足的条件准确地说只能是 $\forall n \in A(m_0 < n)$，那么由上面已证定理，必然存在 m_0^+，使得 $m_0^+ \leqslant n$，即使得 $m_0^+ \in T$，这显然是同上面证明的第二步结论相矛盾的，所以，在给定的上述条件下，$m_0 \in A$ 只能是必然的.

综上所述，最小数原理成立.

推论 设集合 $A \subseteq \omega$，并且 $A \neq \varnothing$，则必定存在集合 T，使得

$$T = \{m \in \omega \mid \forall n \in A(m \leqslant n)\}.$$

并且，如果 $m_0 \in A$ 是 A 的最小数，则 $m_0 \in T$ 并且必然是 T 的最大数.

由上述证明过程来看，推论的真实性是不言而喻的.

第六节　递推原理

我们先来看一些运用递推原理的实例.

1. 取映射 $f:\omega\to\omega$,其中 f 定义如下:

(1) $f(0)=1$;　(2) $f(n^+)=f(n)\cdot n^+$.

即使我们不知道"$\cdot$"的具体内容如何,但根据 f 的上述定义,任何自然数的函数值,我们总能依据该自然数的先行者的函数值最终是 0 的函数值而得到其计算的结果. 如:

$$f(0)=1;$$
$$f(1)=f(0)\cdot 0^+=1\cdot 1;$$
$$f(2)=f(1)\cdot 1^+=(1\cdot 1)\cdot 2;$$
$$f(3)=f(2)\cdot 2^+=((1\cdot 1)\cdot 2)\cdot 3;$$
……

显然,对于满足上述条件(1)和(2)的映射 f,还可以更一般的表示为

$$f(n)=f(n-1)\cdot n.$$

不管怎样表示,也不管"$\cdot$"反映的具体规则如何去计算,n 或者 m 的函数值的依赖关系总是不改变的.

2. 设有整标函数(或数列) $u:\omega\to\mathbf{R}^+$,其中 $\mathbf{R}^+$ 为正实数集合,u 定义如下:

(1) $u(0)=\sqrt{a}$;　(2) $u(n^+)=\sqrt{a+u(n)}$.

由 u 的定义,数列中 n^+ 的值总可以通过 n 的函数值并且最终是 0 的函数值去计算. 如

$$u(0)=\sqrt{a};$$

$$u(1)=\sqrt{a+u(0)}=\sqrt{a+\sqrt{a}};$$

$$u(2)=\sqrt{a+u(1)}=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}};$$

$$u(3)=\sqrt{a+u(2)}=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}};$$

……

比较上述等式的左右两边，计算的过程实际上反映着一个更一般的函数，即

$$f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+,$$

其中，f 被定义为

$$f(x)=\sqrt{a+x},$$

f 的定义域和值域都来自于 $\mathbf{R}^+$，或者较为准确地说：

$$\mathrm{dom}(f)\subseteq\mathbf{R}^+,$$

$$\mathrm{ran}(f)\subseteq\mathbf{R}^+.$$

事实上，这个一般的函数从上述函数 u 的定义中也可以直接得到，只需要在条件(2) 中，令 $x=u(n)$，有

$$u(n^+)=f(x)=\sqrt{a+x},$$

这表明，x 既是函数又是自变量. 而作为函数，它的每一个确定的值都依赖于 $u(n)$ 中的 n，因此，在决定 $f(x)$ 的每一个确定的值时，我们事实上总依赖着原本的函数

$$u:\omega\to\mathbf{R}^+,$$

并且依赖于 u 的初值.

如上述两例中涉及的函数 f，通常被人们称为递归函数. 我们下面所要做的工作，就是从集合论的角度，去说明并提供充分的根据，以保证这种被人们所广泛使用的递归方法的合理性.

二、递归原理

定理(递归原理)　设定非空集合 X 和它的一个元素 a，并给

定函数 $f:X\to X$，那么，存在唯一的函数 $u:\omega\to X$，满足

(1)$u(0)=a$；

(2)$u(n^{+})=f(u(n))$.

对任意的非空集合 X 来说，事实上在 X 上可以建立起许许多多的关系来，其中，当然有许多可能是函数关系. 定理或许对这许多的函数关系本身并不感兴趣. 定理感兴趣的是，对这许多的函数关系中的任一个，都在满足定理给定的条件下，存在唯一的函数 u，构成对该函数自变量的一个有序的指派.

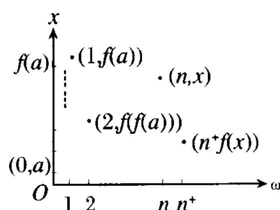
首先，我们可以考虑 u 的存在性. 在这里需要证明的是，对任意的非空集合 X 和它的一个已知元素 a，一定存在满足定理条件的函数 u. 从集合的角度考虑，定理中的两个条件我们相应的分别表示为

(1)$(0,a)\in u$；

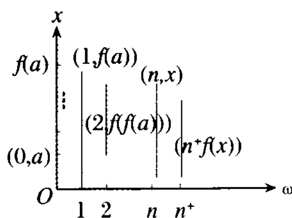
(2)$\forall n\in\omega\forall x\in X((n,x)\in u\to(n^{+}\ f(x))\in u)$.

下面，我们先以图形来观察 u 可能存在的方式，由于函数都是关系，我们可先将 u 同满足条件(1)(2) 的关系 U 作一比较.

右图表示的是函数集 u 的平面坐标图. 由于函数集的第二坐标对相同的第一坐标具有唯一确定性，因此，u 集在坐标平面上的图形只能是一系列孤立的点.



右图表示的是关系集 U 的平面坐标图. 由于关系集的第二坐标对相同的第一坐标没有唯一确定性，因此，U 集在坐标平面上的图形是一条一条垂直于 ω 轴的直线.



满足条件(1)(2) 的关系 U 肯定是存在的，因为我们知道，关系是条件最

为一般的集合.从图形上不难看出,对应于相同第一坐标的任何一条直线,都可以认为是满足条件(1)(2)的若干不同的关系的图形的一个重合.而在若干这样的不同关系中,$\omega\times X$ 应当是其中最大的一个;现在,我们不妨把关系 u 设想为其中的最小的一个,而最小的特征就是,对于满足条件(1)(2)的任意关系 U,u 都应当是 U 的子集,换言之,u 应当是所有的满足条件(1)(2)的关系 U 的交集.下面的证明,就是按照这样的思路来展开的.

证明:我们先通过对 u 的构造来说明 u 的存在性.

首先任意给定满足条件(1)和)(2)的关系 U,即令

(1)$(0,a)\in U$;

(2)$\forall n\in\omega\forall x\in X((n,x)\in U\to(n^{+},f(x))\in U)$.

由上述分析,这样的 U 肯定是存在的,并且,$\omega\times X$ 是其中最大的一个,因此,对任意的这样的 U,都有 $U\subseteq\omega\times X$.

其次,设 M 是有所有的满足条件(1)(2)的关系 U 组成的集合,即

$$M=\{U\subseteq\omega\times X\mid U\text{ 满足条件(1)(2)}\},$$

由于集合 $\omega\times X$ 存在,所以$\wp(\omega\times X)$也一定存在.并且,由于 $\omega\times X\in M$,因此 $M\neq\varnothing$,因此可以进一步假设

$$u=\bigcap(M).$$

上述构造过程表明,只要满足条件(1)(2)的关系 U 存在,那么不等于 $\varnothing$ 的集合 M 就存在,因此,u 也就肯定是存在的.下面要做的,是证明在上述条件下构造的集合 u,就是我们所需要的函数集.

(A)u 作为关系,必定满足上述条件(1)(2).

这是因为,由 u 的构造过程,必然有

$$(0,a)\subseteq\text{每个 }U\to(0,a)\in u;$$

$$\begin{aligned}(n,x)\in u&\to(n,x)\in\text{每个 }U\\&\to(n^{+},f(x))\in\text{每个 }U\\&\to(n^{+},f(x))\in u.\end{aligned}$$

即,在上述条件下所构造的集合 u 满足条件(1)和(2)是必然的.

(B)u 的定义域和值域都是确定的.

这是因为

$$(0,a)\in u\to 0\in \mathrm{dom}(u);$$

而由

$$(n,x)\in u\to (n^{+},f(x))\in u$$

可推出

$$n\in \mathrm{dom}(u)\to n^{+}\in \mathrm{dom}(u).$$

可见,u 的定义域不但存在,而且由归纳原理有

$$\mathrm{dom}(u)=\omega.$$

即,关系 u 的定义域是确定的.

U 的值域 $\mathrm{ran}(u)$ 的确定性是显然的. 这是因为,对满足条件(1)(2)的任意关系 U 来说,都有

$$U\subseteq \omega\times X,$$

由 u 的构成方式,有

$$u=\bigcap(M)\subseteq \omega\times X,$$

这就表明

$$\mathrm{ran}(u)\subseteq X,$$

故 U 的值域也是确定的.

(C)u 必定是函数.

由 u 的构造 u 是函数. 显然,我们只需要证明在 u 的所有元素 (n,x) 中,第二坐标 x 对同一个第一坐标 n 必然是唯一确定的就可以了. 以 $C(x)$ 记条件

$$\forall x\forall y((n,x)\in u\wedge (n,y)\in u\to x=y),$$

显然,满足这样条件的任意自然数 n,足以使关系 u 成为函数. 并且,我们假定由所有的那些满足上述条件的自然数 n 构成一个集合 T,即

$$T=\{n\in\omega\mid C(n)\},$$

由子集公理，这样的集合肯定是合法的. 下面，我们证明 $T=\omega$.

(a) $0\in T$.

(反证法) 如果 $0\notin T$，即是说 $C(0)$ 不成立，那么，就有

$$(0,x)\in u\wedge(0,y)\in u\rightarrow x\neq y; \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

由题设和已证(A)，已有 $a\in X$，使得 $(0,a)\in u$. 但由上述的结论 ① 必定还有

$$b\in X\wedge b\neq a,$$

使得

$$(0,b)\in u.$$

既然如此，我们不妨在 u 集中把这个多余的 $(0,b)$ 去掉，即有

$$u'=u\sim\{(0,b)\}.$$

由差集的定义，u' 应当是一个合法的集合，并且由其构造，应当是 u 集的真子集. 下面，我们就 u' 的构造来讨论它的性质.

首先，由于 $a\neq b$，所以，$(0,a)\neq(0,b)$，由差集的定义，$(0,a)$ 不可能从 u 集中去掉，故一定有

$$(0,a)\in u\sim\{(0,b)\}.$$

即

$$(0,a)\in u'.$$

这表明，u' 是满足上述条件(1) 的.

其次，我们假设 $(n,x)\in u'$，那么由 u' 是 u 的真子集，有 $(n,x)\in u$，再由证明(A)，必然有 $(n^+,f(x))\in u$. 但我们已经证明，$n^+\neq 0$，所以，$(n^+,f(x))\neq(0,b)$，这说明 $(n^-,f(x))$ 也是不能从 u 中去掉的，故

$$(n^+,f(x))\in u'.$$

由

$$(n,x)\in u'\rightarrow(n^+,f(x))\in u'$$

为真可推出 u' 同样是满足条件(2) 的. 于是，$u'\in M$. 由集 u 的构造方式，有

$$u \subseteq u',$$

即，u' 既是 u 的真子集，又是 u 的包容集. 这是一个显然的矛盾. 它说明在反证的前提中假设 $0 \notin T$ 是错误的，故必然有

$$0 \in T.$$

(b) 设 $n \in T$，即 n 是使条件 $C(n)$ 为真的，现在来考察 n^+.

因为 $n \in T$，由 T 的定义，必然有 $(n,x) \in u$，并且对于 n 来说，有 $x \in X$ 且 x 是唯一的. 再由证明(A)，必然有 $(n^+, f(x)) \in u$. 下面我们证明，如果 $(n^+, f(x)) \in u$ 但 $n^+ \notin T$，肯定会导致矛盾.

假设 $(n^+, f(x)) \in u$ 但 $n^+ \notin T$，这就意味着一定存在 $y \in X$，并且 $y \neq f(x)$，使得 $(n^+, y) \in u$，于是有

$$(n^+, f(x)) \in u \land (n^+, y) \in u \to y \neq f(x); \quad \cdots\cdots ②$$

和(a)的证明一样，不妨在 u 集中把这个多余的 (n^+, y) 去掉，即有

$$u^{\cdot} = u \sim \{(n^+, y)\}.$$

由差集的定义，$u^{\cdot}$ 应当是一个合法的集合，并且由其构造，还应当是 u 集的真子集. 下面，我们就 $u^{\cdot}$ 的构造来讨论它的性质.

首先，由于 $n^+ \neq 0$，所以，$(0,a) \neq (n^+, y)$，由差集的定义，$(0, a)$ 不可能从 u 集中去掉，故一定有

$$(0,a) \in u \sim \{(n^+, y)\}.$$

即

$$(0,a) \in u^{\cdot}.$$

这表明，$u^{\cdot}$ 是满足条件(1)的.

其次，假设对任意的 $m \in \omega$，$(m,t) \in u^{\cdot}$，则由 $u^{\cdot} \subset u$，故 $(m,t) \in u$. 但 u 是满足条件(2)的，所以，

$$(m^+, f(t)) \in u.$$

如果 $m = n$，由归纳假设和条件 $C(n)$，有

$$\forall x \forall t((n,x) \in u \land (m,t) \in u \to x = t)$$
$$\to ((m^+, f(t)) = (n^+, f(x)));$$

但 $y \neq f(x)$，所以，

$$(n\ , f(x)) \neq (n^{\cdot}\ , y),$$

并且

$$(m^{+}, f(t)) \neq (n^{+}, y).$$

由此可见，$(m^{+}, f(t))$ 是不能从 u 中被去掉的，即在假设的前提下，公式

$$(m^{+}, f(t)) \in u^{\cdot}$$

为真.

如果 $m \neq n$，那么，$m^{+} \neq n^{+}$，故

$$(m^{+}, f(t)) \neq (n^{+}, y),$$

即$(m^{+}, f(t))$ 还是不能从 u 中去掉，依然有$(m^{+}, f(t)) \in u^{\cdot}$. 可见，无论 m 是否等于 n，只要假设有$(m, t) \in u^{\cdot}$，那么，公式

$$(m, t) \in u^{\cdot} \rightarrow (m^{+}, f(t)) \in u^{\cdot}$$

的值就恒为真. 即，$u^{\cdot}$ 是满足条件(2) 的. 于是，$u^{\cdot} \in M$. 由集 u 的构造方式，有

$$u \subseteq u^{\cdot},$$

即，$u^{\cdot}$ 既是 u 的真子集，又是 u 的包容集. 这是一个显然的矛盾. 它说明在反证的前提中假设 $n^{+} \notin T$ 是错误的，故必然有

$$n^{+} \in T.$$

由归纳原理，$T = \omega$. 即对任意的 $n \in \omega$，都有

$$\forall x \forall y((n, x) \in u \wedge (n, y) \in u \rightarrow x = y),$$

所以，u 是函数集.

再证 u 的唯一性：

假设上述函数 f 还有另外一个函数 φ 也满足

$\varphi(0) = a$;

$\varphi(n^{+}) = f(\varphi(n))$.

那么，由 $\varphi(0) = a$, $u(0) = a = \varphi(0)$，显然有

$$u(0) = \varphi(0);$$

而由 $\varphi(n^{+}) = f(\varphi(n))$ 和上述结论，有

$$u(n^{+}) = f(u(n)) = f(\varphi(n)) = \varphi(n^{+}),$$

即有

$$u(n^{+}) = \varphi(n^{+}).$$

可见,对任意的 $n \in \omega$,都有 $\varphi = u$,即对函数 f 来说,u 都是唯一的.

今后,对于递推原理中的非空集合 X,我们称之为取值集;对于已知的元素 $a \in X$,称之为初值;而给定的函数 f,称之为递推函数.只要有了取值集、初值和递推函数,就一定存在满足条件(1)和(2)的唯一函数 $u:\omega \to X$.

第七节　自然数的和、积、幂

在本节的内容中，我们主要是从集合的角度，来定义自然数的加法、乘法和乘方运算，并在定义的基础上，来证明这些运算的一些基本规律.

一、自然数的加法

定义　自然数集ω中的加法"+"是ω中满足以下条件的唯一运算：即对于任意的$m,n \in \omega$，都有

1. $m+0=m$;

2. $m+n^{+}=(m+n)^{+}$.

利用递推原理，不难说明加法定义的合理性. 事实上，由于$\omega \neq \varnothing$，故对任意给定的$m \in \omega$，m都可以作为初值，使定义中的两个条件相应的表示为

(1)$U_m(0)=m$;

(2)$U_m(n^{+})=(U_m(n))^{+}$.

显然，由在前所建立起来的关于自然数的集合理论，(1)和(2)中的U_m必然是建立在ω到ω上的一个映射，即，$U_m:\omega \to \omega$. 其中，U_m被定义为对任意的$n \in \omega$，都有

$$U_m(n)=m+n.$$

不妨在递推原理中，取$X=\omega$，$a=m$，递推函数由条件(2)有

$$U_m(n^{+})=(U_m(n))^{+}=f(U_m(n)),$$

故不妨令映射$f:\omega \to \omega$，$i=U_m(n)$，定义f为：$f(i)=i^{+}$，则由递推原理可知，U_m是上述f的满足条件(1)和(2)的唯一的函数. f则

是递推函数，当然也是函数，以后，我们把函数 f 的展开式

$$\begin{aligned} f(i) &= i^+ \\ &= (U_m(n))^+ \\ &= (m+n)^+ \\ &= m+n^+ \end{aligned}$$

就称为加法运算，其结果称为加法运算的和.

不要忘记，我们上述讨论始终是建立在任意给定的自然数 m 的基础之上的. 当然，由 $m \in \omega$ 的任意性，上述讨论实际上对任意自然数都成立. 提出这一点的意义是，我们至少还可以从其他方面来考虑加法函数的建立. 如，一种最容易提出的方式是，令映射 f 为

$$f: \omega \times \omega \to \omega,$$

对任意的 $(m,n) \in \omega \times \omega$，定义 $f(m,n) = m+n$. 那么，同样可以证明，U_m 是它唯一存在的满足上述条件 1 和条件 2 的函数.

"+" 运算的性质

1. $m^+ = m+1$.

性质 1 表述的是，$\forall n \in \omega$，其后继数都等于该自然数与 1 的和. 这只需要在加法运算的展开式 $m+n^+ = (m+n)^+$ 中令 $n=0$，然后借助于条件 1 和后继者定义即可.

2. 对任意的 $m,n \in \omega$，都有

(1) $0+n=n$;

(2) $m^+ + n = (m+n)^+$.

证明：对任意的 $m,n \in \omega$，我们对 n 作归纳证明.

(1) 在加法定义的条件 1 中，有

$$m+0=m,$$

令其中的 $0=n$，由 $m \in \omega$ 的任意性，再令 $m=0$，必然有

$$0+0=0,$$

即 $n=0$ 时性质(1) 成立.

设取自然数n时，$0+n=n$是成立的，现在来考察n^+的情况.
由加法定义的条件 2，假设

$$\begin{aligned}0+n^+ &= (0+n)^+\\ &= n^+,\end{aligned}$$

即n^+时性质(1)还是成立，故由归纳原理，对任意$n\in\omega$性质(1)都成立.

(2) 在加法定义的条件 1 中，有

$$m+0=m,$$

令其中的$0=n$，再由$m\in\omega$的任意性，有

$$\begin{aligned}m^++n &= m^++0\\ &= m^+\\ &= (m+0)^+,\end{aligned}$$

所以，当$n=0$时性质(2)是成立的.

设取自然数n时，$m^++n=(m+n)^+$是成立的，现在来考察n^+的情况.
由定义条件 2，

$$m^++n^+=(m^++n)^+,$$

由归纳假设，

$$(m^++n)^+=(m+n)^{++},$$

再由定义条件 2，

$$(m+n)^{++}=(m+n^+)^+,$$

所以有

$$m^++n^+=(m+n^+)^+.$$

即当自然数为n^+时，性质(2)是成立的，故由归纳原理，对任意$n\in\omega$性质(2)都成立.

3. 对任意的自然数l,m,n,

(1)$m+n=n+m$;

(2)$(l+m)+n=l+(m+n)$;

(3) $m + l = n + l \to m = n$.

证明:对任意的 $l, m, n \in \omega$,我们分别对 n, l 作归纳证明.

(1) 当 $n = 0$ 时,由定义条件 1 和已证性质 2,有

$$\begin{aligned} m + 0 &= m \\ &= 0 + m. \end{aligned}$$

即等式是成立的.

现在设取自然数 n 时,$m + n = n + m$ 是成立的,考察 n^+ 的情况. 由定义条件 2,有

$$m + n^+ = (m + n)^+,$$

由归纳假设,有

$$(m + n)^+ = (n + m)^+,$$

再由已证性质 2,

$$(n + m)^+ = n^+ + m,$$

所以,有

$$m + n^+ = n^+ + m.$$

即取自然数 n^+ 时,$m + n^+ = n^+ + m$ 是成立的,由归纳原理,对任意自然数 n,性质(1) 都是成立的.

性质(1) 表明,加法运算是满足交换律的.

(2) 当 $n = 0$ 时,由定义条件 1,有

$$\begin{aligned} (l + m) + 0 &= l + m \\ &= l + (m + 0). \end{aligned}$$

性质(2) 是成立的.

现在设取自然数 n 时,$(l + m) + n = l + (m + n)$ 是成立的,考察 n^+ 的情况. 由定义条件 2,当取自然数 n^+ 时,有

$$(l + m) + n^+ = ((l + m) + n)^+,$$

由归纳假设,

$$((l + m) + n)^+ = (l + (m + n))^+,$$

再由定义条件 2,有

$$(l+(m+n))^{+}=l+(m+n)^{+}$$
$$=l+(m+n^{+}),$$

所以,

$$(l+m)+n^{+}=l+(m+n^{+}).$$

即,当取自然数 n^{+} 时,性质(2) 仍然成立,由归纳原理,(2) 式对一切自然数都成立.

性质(2) 表明,自然数的加法运算是满足结合律的.

(3) 当 $l=0$ 时,由定义条件 1,分别有

$$m+0=m,$$
$$n+0=n;$$

因此,如果

$$m+0=n+0,$$

那么,必然有

$$m=n.$$

即当 $l=0$ 时,性质(3) 是成立的.

现在设当取自然数 l 时, $m+l=n+l\rightarrow m=n$ 是成立的,考察 l^{+} 时的情况. 当取自然数 l^{+} 时,由定义条件 2,有

$$m+l^{+}=n+l^{+}\rightarrow(m+l)^{+}=(n+l)^{+},$$

再由已证性质 2,有

$$(m+l)^{+}=(n+l)^{+}\rightarrow(m^{+}+l)=(n^{+}+l),$$

由归纳假设和自然数已证定理,有

$$(m^{+}+l)=(n^{+}+l)\rightarrow m^{+}=n^{+}$$
$$\rightarrow m=n,$$

所以,有

$$m+l^{+}=n+l^{+}\rightarrow m=n.$$

即当取自然数 l^{+} 时,性质(3) 依然是成立的, 由归纳原理,(3) 式对一切自然数都成立.

性质(3) 表明,数学传统理论中的等量关系在自然数的加法

运算中也是满足的.

二、自然数的乘法运算

定义　自然数集ω中的乘法"·",是ω中满足以下条件的唯一运算:对任意的$m,n \in \omega$,都有

1. $m \cdot 0 = 0$;
2. $m \cdot n^{+} = m \cdot n + m$.

我们把$m \cdot n$称为m与n的积.

事实上,由于$\omega \neq \varnothing$,故对任意给定的$m \in \omega$,m都可以作为初值,使定义中的两个条件相应的表示为

(1)$T_m(0) = 0$;

(2)$T_m(n^{+}) = T_m(n) + m$.

所以,由递推原理,(1)是初始条件,但要注意,此时的初值m与0的积是0而不是m;(2)是一个递推公式.显然,由在前所建立起来的关于自然数的集合理论和加法的定义,(1)和(2)中的T_m必然是建立在ω到ω上的一个映射,即,$T_m:\omega \to \omega$.其中,T_m被定义为对任意的$n \in \omega$,都有

$$T_m(n) = m \cdot n.$$

不妨在递推原理中,取$X = \omega, a = m$,递推函数由条件(2)有

$$T_m(n^{+}) = T_m(n) + m = f(T_m(n)),$$

故可以令映射$f:\omega \to \omega, i = T_m(n)$,定义$f$为:$f(i) = i + m$,则由递推原理可知,$T_m$是上述$f$的满足条件(1)和(2)的唯一的函数.$f$则是递推函数,其唯一性由$T_m$的唯一性所决定,以后,我们把函数$f$的展开式

$$\begin{aligned} f(i) &= i + m \\ &= T_m(n) + m \\ &= m \cdot n + m \end{aligned}$$

就称为乘法运算，其结果称为乘法运算的积. 算子“$\cdot$”的联结力度强于“+”的力度，所以在没有括号的情况下，应当先乘法，后加法.

从上述定义中我们注意到，乘法运算作为乘法的计算过程，实际上还是同乘法有差别的，作为乘法定义的合理性说明，乘法运算是建立在我们已定义的加法的基础之上的. 并且，和加法的讨论方法一样，讨论过程中 m 是任意给定的，给定性在于方便说明，而任意性表明上述的讨论实际上对任意的两个自然数都是适用的.

乘法的基本性质

1. $m \cdot 1 = m$.

由乘法定义的条件(1)(2)，后继者的定义和加法的已证性质，有

$$\begin{aligned} m \cdot 1 &= m \cdot 0^{+} \\ &= m \cdot 0 + m \\ &= 0 + m \\ &= m, \end{aligned}$$

即性质 1 成立.

2. 对任意的 $m, n \in \omega$，都有

(1)$0 \cdot n = 0$,

(2)$m^{+} \cdot n = m \cdot n + n$.

证明：我们对公式中的 n 作归纳证明.

(1) 在定义的条件 $m \cdot 0 = 0$ 中，取 $0 = n$，再由 $m \in \omega$ 的任意性，令 $m = 0$，有

$$0 \cdot 0 = 0,$$

即当 $n = 0$ 时，性质(1) 是成立的.

设取自然数 n 时，$0 \cdot n = 0$ 成立，则当自然数为 n^{+}，有

$$\begin{aligned} 0 \cdot n^{+} &= 0 \cdot n + 0 && \text{(乘法定义条件 2)} \\ &= 0 + 0 && \text{(归纳假设)} \\ &= 0, && \text{(加法定义条件 1)} \end{aligned}$$

即当自然数为 n^+ 时，性质(1) 还是成立的，所以，由归纳原理，对一切自然数性质(1) 必然都成立.

(2) 令 $n = 0$，则有

$$
\begin{aligned}
m^+ \cdot 0 &= 0 & &\text{(乘法定义条件 1)} \\
&= m \cdot 0 & &\text{(同上)} \\
&= m \cdot 0 + 0, & &\text{(加法定义条件 1)}
\end{aligned}
$$

即当 $n = 0$ 时，性质(2) 是成立的.

设取自然数 n 时，$m^+ \cdot n = m \cdot n + n$ 成立，则当自然数为 n^+，有

$$
\begin{aligned}
m^+ \cdot n^+ &= m^+ \cdot n + m^+ & &\text{(乘法定义条件 2)} \\
&= m \cdot n + n + m^+ & &\text{(归纳假设)} \\
&= m \cdot n + n + m + 1 & &\text{(加法性质 1)} \\
&= m \cdot n + m + n + 1 & &\text{(加法交换律)} \\
&= (m \cdot n + m) + (n + 1) & &\text{(加法结合律)} \\
&= m \cdot n^+ + n^+ & &\text{(乘法条件 2,加法性质 1)}
\end{aligned}
$$

即当自然数为 n^+ 时，性质(2) 还是成立的，所以，由归纳原理，对一切自然数，性质(2) 必然都成立.

3. 对任意的 $k, m, n \in \omega$，都有

(1) $m \cdot n = n \cdot m$;

(2) $(k \cdot m) \cdot n = k \cdot (m \cdot n)$;

(3) $m \cdot k = n \cdot k \wedge k \neq 0 \rightarrow m = n$;

(4) $k \cdot (m + n) = k \cdot m + k \cdot n$.

以上性质分别是关于乘法运算的交换律、结合律、消去律和乘法对加法的分配律. 引用归纳原理，上述每个性质都不难证明，下面以(3) 的证明为例，其余的留给读者作为练习.

证明：我们对(3) 中的自然数 k 进行归纳. 因为 $k \neq 0$，不妨令 $k = 1$，有

$$m \cdot 1 = m, \text{(乘法性质 1)}$$

并且

$$n \cdot 1 = n, \text{(同上)}$$

所以，

$$m \cdot 1 = n \cdot 1 \wedge 1 \neq 0 \rightarrow m = n.$$

即当 $k = 1$ 时，性质(3) 是成立的.

设自然数取 k 时，$m \cdot k = n \cdot k \wedge k \neq 0 \rightarrow m = n$ 成立，则当取 k^+ 时，$k^+ \neq 0$ 已证，有

$$m \cdot k^+ = m \cdot k + m, \text{(乘法定义条件 2)}$$

$$n \cdot k^+ = n \cdot k + n, \text{(同上)}$$

所以

$$m \cdot k^+ = n \cdot k^+ \wedge k^+ \neq 0$$

$$\rightarrow m \cdot k + m = n \cdot k + n$$

$$\rightarrow m = n, \text{(归纳假设)}$$

即当自然数为 k^+ 时，性质(3) 还是成立的，所以，由归纳原理，对一切非 0 的自然数性质(3) 必然都成立.

三、自然数的乘方

定义　自然数集 ω 中的乘方，是 ω 中满足以下条件的唯一运算：对任意的 $m, n \in \omega$，都有

1. $m^0 = 1$;

2. $m^{n^+} = m^n \cdot m$.

我们把 m^n 称为 m 的 n 次幂.

事实上，由于 $\omega \neq \varnothing$，故对任意给定的 $m \in \omega$，m 都可以作为初值，使定义中的两个条件相应的表示为

(1) $\Gamma_m(0) = 1$;

(2) $\Gamma_m(n^+) = \Gamma_m(n) \cdot m$.

所以，由递推原理，(1) 是初始条件，但要注意，此时的初值 m

的 0 次幂是 1 而不是 m；同时，由于 $m \in \omega$ 是任意给定的，故无一例外地有 $\Gamma_0(0) = 1$，即 $0^0 = 1$. 这和实用数学中的乘方概念是有区别的，但不要忘记我们是从集合的角度来定义乘方的. 这里的 1 是指，从 $\varnothing$ 到 $\varnothing$ 的所有映射所构成的集合中只有一个元素即 $\varnothing$ 集，即 $\{\varnothing\}$，因此，在理论上并不存在矛盾. 在实用数学中，我们通常规定，在 m^n 中，当 $n = 0$ 时，$m \neq 0$，以排除掉 0^0 的情况. (2) 是一个递推公式. 显然，由在前所建立起来的关于自然数的集合理论和加法、乘法的定义，(1) 和(2) 中的 Γ_m 必然是建立在 ω 到 ω 上的一个映射，即，$\Gamma_m: \omega \to \omega$. 其中，$\Gamma_m$ 被定义为对任意的 $n \in \omega$，都有

$$\Gamma_m(n) = m^n.$$

由在前的证明，当 $m = 0$，并且 $n \neq 0$ 时，$m^n = \varnothing$，即从 n 到 m 的所有映射构成的集合是一个空集.

不妨在递推原理中，取 $X = \omega, a = m$，递推函数由条件(2) 有

$$\Gamma_m(n^+) = \Gamma_m(n) \cdot m = f(\Gamma_m(n)),$$

故可以令映射 $f: \omega \to \omega, i = \Gamma_m(n)$，定义 f 为：$f(i) = i \cdot m$，则由递推原理可知，Γ_m 是上述 f 的满足条件(1) 和(2) 的唯一的函数，f 则是递推函数，其唯一性由 Γ_m 的唯一性所决定，以后，我们把函数 f 的展开式

$$\begin{aligned} f(i) &= i \cdot m \\ &= \Gamma_m(n) \cdot m \\ &= m^n \cdot m \end{aligned}$$

就称为乘方运算，其结果称为乘方运算的幂，乘方运算的级别高于"$\cdot$"和"$+$"运算，所以在没有括号的情况下，应当先乘方，再乘法，后加法.

从上述定义中我们注意到，乘方运算作为乘方的计算过程，实际上还是同乘方有差别的，作为乘方定义的合理性说明，乘方运算是建立在我们已定义的乘法的基础之上的. 并且，和乘法的讨论方法一样，讨论过程中 m 是任意给定的，给定性在于方便说明，而任

意性表明上述的讨论实际上对任意的两个满足上述要求的自然数都是适用的.

乘方的性质

对任意给定的自然数 k,m,n,都有

1. $m^1 = m$;

2. $0^n = 0 \quad (n \neq 0)$;

3. $m^{n+k} = m^n \cdot m^k$;

4. $(m \cdot n)^k = m^k \cdot n^k$;

5. $(m^n)^k = m^{n \cdot k}$.

我们对其中的性质 3 作证明,其余的留给读者做练习使用.

证明:我们对性质 3 中的 k 作归纳证明. 当 $k = 0$ 时,有

$$\begin{aligned} m^{n+0} &= m^n && \text{(加法定义条件 1)} \\ &= m^n \cdot 1 && \text{(乘法性质 1)} \\ &= m^n \cdot m^0. && \text{(乘方定义条件 1)} \end{aligned}$$

即当 $k = 0$ 时,性质 3 是成立的.

设自然数取 k 时,性质 3 成立,考察 k^+ 时的情况. 有

$$\begin{aligned} m^{n+k^+} &= m^{n+k+1} && \text{(加法性质 1)} \\ &= m^{(n+1)+k} && \text{(加法交换、结合律)} \\ &= m^{n^+ +k} && \text{(加法性质 1)} \\ &= m^{n^+} \cdot m^k && \text{(归纳假设)} \\ &= m^n \cdot m \cdot m^k && \text{(乘方定义条件 2)} \\ &= m^n \cdot m^k \cdot m && \text{(乘法交换律)} \\ &= m^n \cdot m^{k^+}. && \text{(乘方定义条件 2)} \end{aligned}$$

即当 k^+ 时性质 3 依然成立,由归纳原理,对一切 $k \in \omega$,性质 3 都是成立的.

第八节　第二归纳原理

在以上讨论过程中，凡涉及证明，在可能的情况下，我们都使用了归纳原理. 一般来说，涉及自然数集合的多数问题，我们虽然都有可能考虑归纳原理. 但我们现在所使用的归纳原理是受到一定的限制的. 例如，

命题　任一不小于 2 的自然数，必定能表示为一些质数的乘积.

用原来的归纳原理对这个命题进行证明是困难的，因为当我们假设 n 能被表示为一些质数的乘积，如 $k_1 \cdot k_2 \cdot \cdots \cdot k_m$ 时，n^+ 实际上是无法利用这一归纳假设的，因此也就无法完成命题的证明. 正因为如此，我们必须考虑加强归纳原理的条件，使它能在更广的范围中得以应用. 第二归纳原理就是这样考虑的一个结果. 相对于第二归纳原理，我们把原来的归纳原理称为第一归纳原理.

第二归纳原理　设 $A \subseteq \omega$，并且 A 满足以下条件：对任意的 $n \in \omega$ 都有，如果任何小于 n 的自然数 m 都是属于 A 的，那么，如果 n 属于 A，则 $A = \omega$.

应用逻辑的输入律，第二归纳原理逻辑等值于命题“设 $A \subseteq \omega$，并且 A 满足以下条件：对任意的 $n \in \omega$ 都有，如果任何小于 n 的自然数 m 都是属于 A 的，并且 n 属于 A，则 $A = \omega$.”命题中 A 所满足的条件为

$$\forall m, n \in \omega (m < n \land m \in A \land n \in A).$$

同第一归纳原理比较，在第二归纳原理中，初始条件 $0 \in A$ 从字面上消失了，递推公式则从 $n \in A \to n^+ \in A$ 加强为上面的公式. 事实上，由于 $A \subseteq \omega$，因此，$0 \in A$ 是不言而喻的，它显然被包含在

了加强的公式之中.

证明:设 $A \neq \omega$,则 $\omega \sim A \neq \varnothing$. 由最小数原理,$\omega \sim A$ 必然有最小数,记为 n_0,所以对任意的 $m < n_0$,都有 $m \in A$,由归纳假设,有

$$m < n_0 \wedge m \in A \wedge n_0 \in A.$$

这显然与 $n_0 \in \omega \sim A$ 相矛盾,故 $A \neq \omega$ 是错误的,必然有 $A = \omega$.

现在,我们用第二归纳原理证明上面提出的命题.

设 $A = \{n \in \omega \sim \{0,1\} \mid n$ 能表示为质数之积$\} \cup \{0,1\}$,

对任一 $n > 1$,若除 0,1 外的所有小于 n 的自然数都能表示为质数的乘积,现在考虑 n.

如果 n 本身就是质数,则命题已经成立;

如果 $n = m \cdot k$,其中,

$$1 < k < n,$$
$$1 < m < n,$$

并且,m,k 中至少有一个不是质数,那么由归纳假设,m,k 都是能表示为质数的乘积的,当然 n 也能表示为质数的乘积,所以,$n \in A$. 所以,由第二归纳原理,$A = \omega$. 命题为真.

思考与练习

1. 计算：$\{2\}^+$，$\bigcup(\{2\}^+)$；并证明：对于任意集合 A，都有 $\bigcup(\{A\}^+) = A^+$.

2. 证明：对于任意自然数 n，$\bigcup(n^+) = n$，但 n 不能是任意的集合.

3. 证明：在任意的自然数 n 和 n 的后继者 n^+ 之间，不存在其他的自然数.

4. 证明：若 $\bigcup(A) = A$，那么，如果 A 是自然数集 ω 的非空子集，那么，$A = \omega$.

5. 设 $A \subseteq \omega$. 当且仅当存在 $u \in \omega$，使得对任意的 $n \in A$，都有 $n \leqslant u$，则称 A 有上界，并称 u 是 A 的一个上界. 证明：若 $A \subseteq \omega$ 且 $A \neq \varnothing$，那么，若 A 有上界，则 A 有最大数(即存在 $m \in A$，使得对任意的 $n \in A$，都有 $n \leqslant m$).

6. 给定非空集合 X 和 $a \in X$，令 $f: \omega \times X \to X$，证明：存在唯一的函数 $u: \omega \to X$，满足

(1) $u(0) = a$；

(2) $u(n^+) = f(n, u(n))$.

7. 证明：对任意自然数 m, n，$m < n$，当且仅当存在 $p \in \omega$ 且 $p \neq 0$，使得 $n = m + p$，并且，如果这样的 p 存在，那么 p 是唯一的.

8. 给定任意集合 A, B，若 $N(A) = n$，$N(B) = m$，那么

(1) 若 $A \cap B \neq \varnothing$，则 $N(A \cup B) = n + m$；

(2) $N(A \times B) = n \cdot m$.

第六章　集合的等势与受制

在本章的讨论中，我们将再回到集合的一般理论上，并以前述内容为基础，把集合论的系统构建引向深入.

第一节　集合的等势

数量问题，是人们在实践中经常会遇到的问题. 在对集合的认识和实践中也是一样. 人们对任意给定的两个集合，常常需要关心，它们谁的元素可能会多一些或者会少一些. 当然，对两个有限集来说，这看起来是一个不难于回答的问题：数一数它们的元素的个数就可以了. 但对于无限集（这肯定是存在的，例如归纳集，或者传递集）之间的比较可能就有问题了，因为无限集的元素肯定是无法数完的. 其实，就是对有限集来说，"数"的方式也可能是有问题的，当集合元素的数量虽然有限但非常多时，用"数"的方式总会存在这样或那样的困难. 那么，究竟该如何去比较集合之间元素的数量呢？这就是本节需要回答的问题.

从两个有限集元素的数量比较方式来看，除了"数"的方式外，其实还存在一种"配对"的方法：我们将两个集合的元素逐一地配对，如果它们的元素刚好能配对，我们就能断定它们的元素是同样地多的. 下面，我们就把这种"配对"的方法发展到两个无限

集的数量比较上去.从函数或者映射的观点来看,两个集合的元素是否刚好"配对",就是能否在两者之间建立起一个双射的函数关系.

一、等势的定义

定义 对于集合 A,B,当且仅当存在从 A 到 B 上的一个双射时,称 A 等势于 B,记为

$$A \approx B.$$

集合 A 等势于集合 B,其含义是说 A 的元素和 B 的元素"同样多".

例 1 记 $\omega_z \subset \omega$ 为一切自然数中的偶数的集合,取

$$f:\omega \to \omega_z,$$

对任意的 $n \in \omega$,定义 f 为:

$$f(n) = 2n$$

显然,f 是从 ω 到 ω_z 的一个双射,所以有

$$\omega \approx \omega_z.$$

在上述例子中,尽管 ω_z 只是 ω 的一个真子集,但由于在二者之间确实能够找到这样一个"配对"的双射,所以它们是等势的.

例 2 实数集 $\mathbf{R}$ 中的开区间 $(0,1) \approx \mathbf{R}$

事实上,对于集合 $\mathbf{R}$ 和 $(0,1)$ 来说,存在映射

$$f:(0,1) \to \mathbf{R},$$

对任意的 $x \in (0,1)$,只需定义 f 为

$$f(x) = \cot \pi x,$$

由余切三角函数的性质,当 $x \to 0$ 时,$\cot \pi x \to +\infty$,当 $x \to 1$ 时,$\cot \pi x \to -\infty$,所以,f 必定是由 $(0,1)$ 到 $\mathbf{R}$ 上的双射.故

$$(0,1) \approx \mathbf{R}.$$

例 3　$\omega\times\omega\approx\omega$.

对于自然数集 ω 笛卡尔乘积 $\omega\times\omega$，先作如下的一个分类：

把 $\{(0,0)\}$ 称为第 0 类，记为 0；

把 $\{(0,1),(1,0)\}$ 称为第 1 类，记为 1；

把 $\{(0,2),(1,1),(2,0)\}$ 称为第 2 类，记为 2；

……

把 $\{(m,n)\mid m,n\in\omega\wedge(m+n)=k\}$ 称为第 k 类，记为 k；

……

现在设

$$f:\omega\times\omega\to\omega,$$

并且定义 f 为

$$f(m,n)=\frac{(m+n)((m+n)+1)}{2}+m,$$

那么，

$$\omega\times\omega\approx\omega.$$

这是因为，首先，我们能够证明上述的 f 是单射. 因为，对任给的 $(m,n)\neq(k,j)$，或者有：

1. $m+n\neq k+j$，这表明 (m,n) 和 (k,j) 必然不是同一类. 不妨设 $m+n>k+j$，即 (m,n) 属于比 (k,j) 要大的类，由已证定理，必然有

$$m+n\geqslant(k+j)+1,$$

所以，有

$$(m+n)+1>(k+j)+1,$$

于是，有

$$(m+n)\cdot((m+n)+1)>(k+j)\cdot((k+j)+1),$$

$$\frac{(m+n)((m+n)+1)}{2}>\frac{(k+j)((k+j)+1)}{2}.$$

现在，对于函数 f 表达式中的 m 和 k，我们能够了解的仅仅是它们

是作为某类中(m,n)的顺序指标出现的，因此有$m\geqslant 0,k\geqslant 0$. 故不妨考虑

$$f(m,n)-f(k,j)$$
$$=\frac{(m+n)((m+n)+1)}{2}+m-\frac{(k+j)((k+j)+1)}{2}-k$$

的性质符号. 由于通分后去掉分母2并不改变结果的性质符号，故上式整理后有

$$((m+n)+(k+j))((m+n)-(k+j))+((m+n)-(k+j))+(2m-2k),$$

因为

$$m+n>k+j,$$

所以，

$$(m+n)-(k+j)>0,$$

由已证，又有

$$(m+n)-(k+j)\geqslant 1,$$

于是有

$$((m+n)+(k+j))((m+n)-(k+j))+((m+n)-(k+j))+(2m-2k)$$
$$\geqslant (((m+n)+(k+j))+1+(2m-2k)$$
$$>3m+n+j-k.$$

再由$(m+n)-(k+j)>0$有

$$m+n+j>k,$$

所以，

$$3m+n+j-k>2m\geqslant 0,$$

即

$$f(m,n)-f(k,j)>0.$$

可见，当$(m,n)\neq(k,j)$并且两者不属于同一类时，函数f是单射.

或者有：

2. $(m,n) \neq (k,j)$ 并且两者属于同一类时，有

$$m + n = k + j.$$

此时，必然有 $m \neq k$，否则，就会出现 $n = j$，这同$(m,n) \neq (k,j)$ 显然矛盾. 故还是必然有

$$f(m,n) - f(k,j) \neq 0.$$

这说明在 2 的可能情况下函数 f 依然是单射.

综上所述，函数 f 是 $\omega \times \omega$ 到 ω 上的.

其次可证，f 是 $\omega \times \omega$ 到 ω 上的一个满射.

首先，当 $m = n = 0$ 时，$f(0,0) = 0$，即 $0 \in \mathrm{ran}(f)$.

现假设 $f(m,n) = p \in \mathrm{ran}(f)$，考察 p^+ 的情况. 我们看紧跟在元素(m,n) 后面一个元素 S 的情况. 若 S，(m,n) 同属于 k 类，由上述分类的规律，$S = (m^+, n^-)$，从而有

$$\begin{aligned}
f(m^+, n^-) &= \frac{(m^+ + n^-)((m^+ + n^-) + 1)}{2} + m^+ \\
&= \frac{(m + 1 + n - 1)((m + 1 + n - 1) + 1)}{2} + m + 1 \\
&= \frac{(m + n)((m + n) + 1)}{2} + m + 1 \\
&= p + 1 \\
&= p^+ \in \mathrm{ran}(f).
\end{aligned}$$

若(m,n) 刚好属于第 k 类最后一个元素，所以，紧跟其后的元素 S 就应该是第 $k+1$ 类元素的第 1 个，那么此时有$(m,n) = (k, 0)$，$S = (0, k+1)$，因此，由归纳假设

$$\begin{aligned}
f(m,n) = f(k,0) &= \frac{(k + 0)((k + 0) + 1)}{2} + k \\
&= \frac{k(k + 1)}{2} + k \\
&= p \in \mathrm{ran}(f),
\end{aligned}$$

而

$$f(0, k + 1) = \frac{(0 + (k + 1))((0 + (k + 1)) + 1)}{2} + 0$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\
&= \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 \\
&= p + 1 \\
&= p^{+} \in \operatorname{ran}(f),
\end{aligned}
$$

由归纳原理，$\operatorname{ran}(f) = \omega$，即，$f$ 必然是满射.

综上所述，所建立的函数 f 必然是 $\omega \times \omega$ 到 ω 的. 所以，

$$\omega \times \omega \approx \omega.$$

例 4　$\omega \not\approx [0,1)$.

定义　级数 $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot 10^{-(i+1)}$ 称为一个标准十进制小数，当且仅当 a_i 在 $\{0,1,2,\cdots,9\}$ 中取值，并且不从某项起全为 9.

可以证明，$[0,1)$ 中的任一实数，都可以表示成唯一的标准十进制小数；同时，任一标准十进制小数，也必然收敛于 $[0,1)$ 中的某个唯一的实数.

由定义中对 a_i 的规定，每个标准的十进制小数实际上都对应着一个 $(a_i)_{i\in\omega}$ 的序列，如 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$，我们把这样的序列也因此称为一个标准的十进制序列. 在上述的规定之下，区间 $[0,1)$ 就等势于由一切标准十进制序列构成的集合 D. 即 $[0,1) \approx D$. 1890 年，康托尔以对角线方法证明了 $\omega \not\approx [0,1)$，证明过程如下：

设 f 是 ω 到 D 的一任意的映射，即 $f: \omega \to D$，定义 f 为

$$f(j) = (a_i^j)_{i\in\omega},$$

则有

$$
\begin{aligned}
f(0) &= a_0^0, a_1^0, a_2^0, a_3^0, \cdots \\
f(1) &= a_0^1, a_1^1, a_2^1, a_3^1, \cdots \\
f(2) &= a_0^2, a_1^2, a_2^2, a_3^2, \cdots \\
f(3) &= a_0^3, a_1^3, a_2^3, a_3^3, \cdots \\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

现在，我们来构造一个这样的标准十进制序列，令

$$b = (b_i)_i \in \omega,$$

使得对于每个 $i \in \omega$，都有

$$b_{\neq} a_i^i.$$

即在

$$b = b_0, b_1, b_2, b_3, \cdots$$

中，有 $b_0 \neq a_0^0, b_1 \neq a_1^1, b_2 \neq a_2^2, b_3 \neq a_3^3, \cdots$ 由此方式所构造的 $b \notin \mathrm{ran}(f)$，可见，$f: \omega \to D$ 不是满射.

由于 f 是任意的，可见，从 ω 到 D 内的映射都不会是满射，当然从 ω 到 D 上不存在双射，所以，$\omega \not\approx D$，从而 $\omega \not\approx [0,1)$.

例 5 $\wp(X) \approx 2^X$.

这是因为对任意的 X，任设 $A \subseteq X$，则可令

$$C_A: X \to 2$$

为一映射，由于 A 的任意性，可以把 2^X 作为定义在 X 上的所有特征函数的集合，即

$$2^X = \{A \mid A \subseteq X\}.$$

现在取映射

$$f: \wp(X) \to 2^X,$$

则对任意的 $A \in \wp(X)$，都有

$$f(A) = C_A,$$

所以，

$$\wp(X) \approx 2^X.$$

二、关于等势的一般性质

1. 对任意的集合 A, B, C，

(1) 自返性：$A \approx A$.

以 A 上的恒等函数为 f，则有 $f: A \to A$ 必然是双射，故自返性成立.

(2) 对称性：$A \approx B \to B \approx A$.

这是因为，如果存在 f 是使得 $A \approx B$ 的那个双射，那么，由双射的性质，f^{-1} 也必然是由 B 到 A 上的双射，所以，必然有 $B \approx A$.

(3) 传递性：$A \approx B \wedge B \approx C \to A \approx C$.

因为，如果 $A \approx B$，是存在 A 到 B 上的双射 f；而如果 $B \approx C$，则存在 B 到 C 上的双射 g，由已证，如果 f，g 都是双射，那么，$g \cdot f$ 一定是由 A 到 C 上的双射，故 $A \approx C$.

2. 对任意的集合 A,B,C,D，

(1) $A \approx C \wedge B \approx D \to A \times B \approx C \times D$.

证明：由 $A \approx C \wedge B \approx D$，存在双射 f，g，使得

$$f: A \to C,$$

$$g: B \to D.$$

现在令

$$g \cdot f: A \times B \to C \times D,$$

定义：对任意的 $(a,b) \in A \times B$，都有

$$g \cdot f((a,b)) = (f(a), g(b)),$$

那么，$g \cdot f$ 就是 $A \times B$ 到 $C \times D$ 上的一个双射. 而 $A \times B \approx C \times D$.

这是因为，如果 $g \cdot f$ 不是 $A \times B$ 到 $C \times D$ 上的单射，由单射的定义，则在 $A \times B$ 中一定还存在 (x,y) 并且 $(x,y) \neq (a,b)$，使得

$$\begin{aligned} g \cdot f((x,y)) &= (f(x), g(y)) \\ &= (f(a), g(b)), \end{aligned}$$

由序偶的相等，必然有

$$f(a) = f(x),$$

并且

$$g(b) = g(y),$$

由于 $(x,y) \neq (a,b)$，因此，或者有 $x \neq a$，但由 $f(a) = f(x)$，这与 f 是单射相矛盾；或者有 $y \neq b$，但由 $g(b) = g(y)$，这与 g 是单射相矛盾. 综上所述，$g \cdot f$ 在上述给定的条件下只能是单射.

如果 $g \cdot f$ 不是 $A \times B$ 到 $C \times D$ 上的满射，则必定存在 $(x_c, y_d) \in C \times D$，使得

$$(x_c, y_d) \notin \operatorname{ran}(g \cdot f),$$

这或者是因为 $x_C \notin \operatorname{ran}(f)$，或者是因为 $y_D \notin \operatorname{ran}(g)$，但无论哪种情况，都是同已知 f, g 都是满射相矛盾的，故 $g \cdot f$ 只能是 $A \times B$ 到 $C \times D$ 上的满射.

综上所述，在给定条件 $A \approx C \wedge B \approx D$ 下，$g \cdot f$ 一定是 $A \times B$ 到 $C \times D$ 上的一个双射，所以，

$$A \times B \approx C \times D.$$

(2) $A \approx C \wedge B \approx D \wedge A \cap C = B \cap D = \varnothing \rightarrow A \cup B \approx C \cup D$.

证明：若 $A \approx C \wedge B \approx D$，则一定存在双射 f, g，使得

$$f: A \rightarrow C,$$

并且

$$g: B \rightarrow D.$$

令 $F: A \cup B \rightarrow C \cup D$，定义 F 为

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \wedge x \notin B; \\ g(x) & x \in B \wedge x \notin A; \\ (f(x), g(x)) & x \in A \wedge x \in B. \end{cases}$$

由于 $A \cap C = B \cap D = \varnothing$，因此，不可能存在某个 $x_0 \in A$，使得 $x_0 = f(x)$；也不可能存在某个 $x_1 \in B$，使得 $x_1 = g(x)$，因此也就不可能存在某个 $x_0 \in A \wedge x_0 \in B$ 时（或者存在某个 $x_1 \in A \wedge x_1 \in B$ 时），使得

$$(f(x), g(x)) = (f(x_0), g(x_0)),$$

或者

$$(f(x), g(x)) = (f(x_1), g(x_1)),$$

因此，不难验证，$F(x)$ 必然是 $A \cup B$ 到 $C \cup D$ 上的一个双射，即有

$$A \cup B \approx C \cup D.$$

(3) $A \approx B \to \wp(A) \approx \wp(B)$.

证明：因为 $A \approx B$，故必定存在双射 f，使得 $f: A \to B$. 设映射 $F: \wp(A) \to \wp(B)$，对任意的 $X \in \wp(A)$，定义 F 为

$$F(X) = \{f(a) \mid \forall a(a \in X)\}.$$

由于 f 是 A 到 B 上的双射，故不难验证 F 必然是 $\wp(A)$ 到 $\wp(B)$ 上的一个双射，所以，由 $A \approx B$，有

$$\wp(A) \approx \wp(B).$$

第二节　有限集

在本节的讨论中，我们将利用等势的概念给出有限集和无限集的定义，并讨论两者之间的关系.

一、有限集与无限集的定义

定义　对于集合 A，当且仅当存在某个自然数 n，使得 $A \approx n$，则称 A 是有限集，即

$$A\text{ 有限} \leftrightarrow \exists n \in \omega (A \approx n).$$

在前一章自然数集的讨论中，我们已经证明了自然数集的任何一个元素都是有限集. 在上述的定义中，我们正是利用了自然数的这一特征，来分辨集合的有限和无限. 下面，在继续深入讨论之前，我们需要解决的一个问题是：$A \approx n$ 并且 $A \approx m$，由等势的传递性当然有 $m \approx n$，但能否由此推出 $m = n$? 从人们的经验上看这是显然的，但在逻辑上却并不显然. 因为对更多的集合来说，等势但却并不等同. 下面，我们首先需要证明的就是，对任意的 $m, n \in \omega$，都有

$$m \approx n \rightarrow m = n.$$

二、等势于有限集的自然数的唯一性

引理 1　与空集 $\varnothing$ 等势的集合只有空集 $\varnothing$.

由自然数的集合定义，引理 1 等于说：与 0 等势的自然数只能是 0.

证明：设集合 $A \approx \varnothing$，由等势的定义，存在双射 f，使得 f：$\varnothing \to A$. 但我们已经证明对任意集合 A 来说，都有

$$A^{\varnothing} = \{\varnothing\},$$

由于双射应当是满占的，所以必定有

$$\operatorname{ran}(f) = A = \operatorname{ran}(\varnothing),$$

即有

$$A = \varnothing,$$

所以

$$\varnothing \approx \varnothing.$$

特别地，

$$0 \approx 0.$$

引理 2　对任意的 m, n，都有

$$m \approx n \to m = n.$$

证明：我们运用归纳原理，设集合 $T = \{n \in \omega \mid \forall m \in \omega(m \approx n \to m = n)\}$，

1. $0 \in T$.

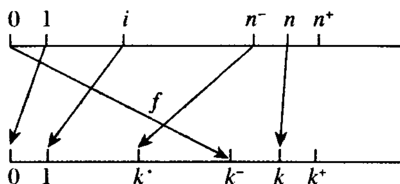
这是引理 1 的自然结果.

2. 设 $n \in T$，即对任意的 $m \in \omega \wedge m \approx n \to m = n$ 为真，考察 n^+ 的情况.

若设定 $m \approx n^+$，那么由于 $n^+ \neq 0$，由已证，$m \neq 0$. 不妨设 k 是 m 的先行者，故有 $k^+ = m$，由等势的传递性，$k^+ \approx n^+$. 下面，如果我们能证明 $k^+ = n^+$，或者能证明 $k = n$，当然就可以了.

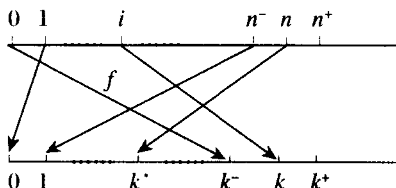
因为 $k^+ \approx n^+$，所以存在双射 f，使得 $f: n^+ \to k^+$.

如果在双射 f 从 n^+ 到 k^+ 的一一对应中，恰好有 $f(n) = k$，如下面的图形所示：



则 f 的限制 $f \mid n$ 就是从 n 到 k 上的双射，必然有 $n \approx k$，有归纳假设，$n = k$. 再由 k 的定义，有 $m^- = n$，当然有 $m = n^+$，所以 $n^+ \in T$.

如果在双射 f 从 n^+ 到 k^+ 的一一对应中，有 $f(n) \neq k$，则必然是存在某个 $i \in n^+$，使得 $f(i) = k$，如下面的图形所示：



此时，$f(n) = k'$. 我们不妨另设一个映射 g 来代替 f，使得

$$g(i) = \begin{cases} k & i = n \\ f(n) = k' & i = f^{-1}(k) \\ f(i) & i \neq n \wedge i \neq f^{-1}(k). \end{cases}$$

显然，如上述方式 g 是从 n^+ 到 k^+ 上的双射，并且恰好有 $g(n) = k$. 因此，$g \mid n$ 依然是由 n 到 k 上的双射，故有 $n \approx k$，由归纳假设，有 $n = k$，从而有 $n^+ = k^+ = m$，所以，$n^+ \in T$.

综上所述，由归纳原理，$T = \omega$，即

$$\forall m, n \in \omega (m \approx n \rightarrow m = n).$$

引理 2 断定，同任何一个给定的有限集等势的自然数都分别只能是唯一确定的. 既然如此，我们以后把同有限集 A 等势的自然数 n，称为 A 的元素的个数，记为

$$N(A) = n.$$

当然，特别地有

$$N(n) = n..$$

引理 3　设 $B \subsetneqq n$，则 $\exists m \in \omega \wedge (m < n(B \approx m))$.

证明：设 $T = \{n \in \omega \mid \forall B(B \subsetneqq n \rightarrow \exists m \in \omega \wedge m < n(B \approx m))\}$，我们用归纳原理.

1. $0 \in T$.

这是因为，当 $n = 0$ 时，$B \subsetneqq n$，的值永假，所以，公式

$$\forall B(B \subsetneqq 0 \rightarrow \exists m \in \omega \wedge m < 0(B \approx m))$$

的值永真.

2. 设 $n \in T$，即设公式 $\forall B \subsetneqq n \rightarrow \exists m \in \omega \wedge m < n(B \approx m)$ 为真，来看 n^+.

若 $B \subsetneqq n^+$，那么由于 B 和 n 都是 n^+ 的子集，因此必须考虑 n 和 B 的顺序问题.

(1) 如果 $n \notin B$，由 $B \subseteq n^+ = n \cup \{n\}$，那么，或者有 $B = n$，或者有 $B \in n$.

如果是 $B = n$，不妨我们就取 $m = n$，必然有 $m < n^+$，并且由 $B = m$，当然有 $B \approx m$.

如果是 $B \in n$，由前一章所证，有 $B \subsetneqq n$，由归纳假设，$\exists m \in \omega \wedge m < n((B \approx m))$ 为真，当然 $\exists m \in \omega \wedge m < n^+ (B \approx m)$ 也为真. 综上所述，在(1) 的情况下，总有 $B \approx m$ 成立，故 $n^+ \in T$.

(2) 如果是 $n \in B$，不妨将 n 从 B 中减去，有

$$B' = B \sim \{n\}.$$

由假设条件 $B \subsetneqq n^+$，和差集的性质，必然有 $B' \subsetneqq n^+ = n \cup \{n\}$. 因为 $n \notin B'$，所以 $B' \subsetneqq n$，否则，由 $B = B' \cup \{n\} = n^+$ 必然同假设矛盾. 由归纳假设，$\exists m \in \omega \wedge m < n\ (B \approx m)$，即存在双射 $f: m \rightarrow B'$. 现在，我们对 F 作如下的补充，令

$$g(i) = \begin{cases} f(i) & i \in m, \\ n & i = m. \end{cases}$$

不难验证，在映射 $g: m^+ \to B$ 中，g 为一双射，从而有 $m^+ \approx B$. 有于 $m < n$，所以 $m^+ < n^+$，可见，只要有 $B \subsetneq n^+$，就一定存在 $m^+ < n^+$，使得 $B \approx m^+$，即 $n^+ \in T$.

综上所述，由归纳原理，$T = \omega$. 引理 3 成立.

定理 有限集的任意子集都是有限集.

证明：设 A 是有限集，由已证，存在 $n \in \omega$ 并且存在双射 $f: A \to n$，使得 $A \approx n$. 令 $B \subseteq A$，则如果 $B = A$，那么定理当然已经成立. 如果 $B \subsetneq A$，则因为 f 是双射，所以必然有 $f(B) \subsetneq f(A) = n$. 即有 $f(B) \subsetneq n$. 由已证，一定存在 $m \in \omega \wedge m < n(f(B) \approx m)$. 再由 f 是双射，有 $f(B) \approx B$，由等势的传递性，必然有 $B \approx m$. 即 B 只能是有限集. 由于集合 $B \subseteq A$ 是任意的，故任何有限集的任意子集都是有限集成立.

定理 任何有限集 A 都不能与其任意的真子集 B 等势. 且 $N(B) < N(A)$.

证明：设集合 A 有限，集合 $B \subsetneq A$.

因为 A 是有限集合，由已证，存在自然数 n，使得 $A \approx n$. 并且 A 的元素的个数 $N(A) = n$；再由 $B \subsetneq A$，则由已证必定存在自然数 $m < n$，使得 $B \approx m$，并且 B 的元素的个数 $N(B) = m$. 由 $m < n$ 可知 A，B 的元素不可能"配对"同样多，因此，B 不能同 A 等势. 又因 $m < n$，即 $N(B) < N(A)$. 由 A，B 集合的任意性，定理成立.

上述定理实际上描述了一个集合为有限集的必要条件：A 有限，除非 A 不与其任何真子集等势. 我们把这个必要条件的否定作为推论，以便于在证明中应用.

推论 若集合 A 与其某个真子集等势，那么 A 是无限集.

第三节　集合的受制

一、受制的定义

定义　对于集合 A,B,当且仅当存在从 A 到 B 内的某个单射,则称 A 受制于 B,记为

$$A \lhd B.$$

并且,当且仅当 $A \lhd B \wedge A \not\approx B$,称 A 严格受制于 B,记为

$$A \prec B.$$

受制是集合之间数量关系的另一种反映方式. $A \lhd B$,是说 $N(A)$ 不会大于 $N(B)$,而 $A \prec B$,则肯定 $N(A)$ 一定是小于 $N(B)$ 的. 例如,对于集合 ω_e 和 ω 设 $f:\omega_e \to \omega$,定义 f 为 $f(n)=\frac{1}{2}n$,则显然 f 是由 ω_e 到 ω 内的一个单射,故有 $\omega_e \lhd \omega$. 反之,若设 $g:\omega \to \omega_e$,定义 g 为 $g(n)=2n$,则 g 是 ω 到 ω_e 内的一个单射,故 $\omega \lhd \omega_e$. 事实上我们知道,ω_e 和 ω 的元素是"配对同样多"的,因此它们是互相受制的. 又如,对于集合 ω 和 $[0,1)$,设 $f:\omega \to [0,1)$,定义 f 为 $f(n)=\frac{n}{n+1}$,则显然 f 是由 ω 到 $[0,1)$ 内的一个单射,故有 $\omega \lhd [0,1)$. 而我们已知,ω 和 $[0,1)$ 是不等势的,所以,有 $\omega \prec [0,1)$.

关于受制的定义,应当注意以下几点:

定义的等价形式:集合 A 受制于集合 B,当且仅当 A 与 B 的某个子集等势. 即

$$A \lhd B \leftrightarrow A \approx C \subseteq B.$$

这是因为，若 $A \approx C \subseteq B$，则存在双射 $f: A \to C$，所以，f 必然是从 A 到 B 内的单射，当然有 $A \lhd B$；反之，若 $A \lhd B$，即存在从 A 到 B 内的单射 f，当然 f 一定是从 A 到 $f(A) = C \subseteq B$ 的双射，故 $A \approx C$.

由定义，一般有：若 $A \subseteq B$，则 $A \lhd B$，由于 $A \subseteq A$，所以，$A \lhd A$. 但要注意的是，即令 $A \subsetneqq B$，但 $A \prec B$ 并无必然性. 如 $\omega_e \subsetneqq \omega$，$[0,1) \subsetneqq \mathbf{R}$ 都是例证.

由受制的定义，受制关系具有传递性. 即

$$A \lhd B \wedge B \lhd C \to A \lhd C.$$

这是因为，由 $A \lhd B$，则存在单射 $f: A \to B$；由 $B \lhd C$，则存在单射 $g: B \to C$，所以，由映射的复合，必然有单射 $g \cdot f: B \to C$，所以，$A \lhd C$.

二、Cantor 的最大集合不存在定理

定理　对于任意集合 X，都有 $X \prec \wp(X)$.

本定理断定的是，任意集合都严格受制于它的幂集.

证明：先证明对任意集合而言，都有 $X \lhd \wp(X)$.

设 $f: X \to \wp(X)$，对任意 $x \in X$ 定义 f 为 $f(x) = \{x\}$. 显然，f 是 X 到 $\wp(X)$ 内的一个单射，所以，$X \lhd \wp(X)$.

其次证明 X 同 $\wp(X)$ 不能等势.

设 f 是 X 到 $\wp(X)$ 内的任一映射，则对任一 $x \in X$，$f(x) \in \wp(X)$，所以，必然有 $f(x) \subseteq X$，由子集公理，我们如下构造集合 B，使得

$$B = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}.$$

由子集公理，集合 X 的这样的子集 B 肯定是存在的. 那么，以下只需要说明 $B \notin \mathrm{ran}(f)$ 就可以了.

事实上，集合 B 的定义的等价形式为：

$$\forall x \in X(x \in B \leftrightarrow x \notin f(x)),$$

从而由外延公理，对任一 $x \in X$，都有 $f(x) \neq B$，这就足以表明 $B \notin \mathrm{ran}(f)$，即从 X 到$\wp(X)$ 内的任意映射 f 都不能是满射，当然更不能是双射，因此 $X \not\approx \wp(X)$，即

$$X \prec \wp(X).$$

由于$\wp(X) \approx 2^X$，因此我们利用上述结论有下述结果：对任意的集合 X，都有

$$X \prec 2^X.$$

三、施累德－伯恩思坦(Schrder－Bernstein) 定理

定理 对任意给定的集合 A 和 B，若 A 受制于 B 并且 B 受制于 A，那么 A 等势于 B，即

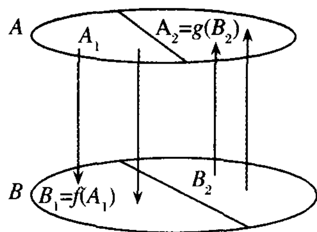
$$\forall A \forall B(A \trianglelefteq B \wedge B \trianglelefteq A \rightarrow A \approx B).$$

施累德－伯恩思坦定理（以下简称"S－B 定理"）在直观上是明显的. 由于 A 和 B 互相受制，即 A 的元素数量不比 B 的元素数量多，且同时 B 的元素数量也不比 A 的元素数量多，或者说 B 的元素数量不比 A 的元素数量少，并且 A 的元素数量也不比 B 的元素数量少，因此，我们可以设想，A 和 B 的元素是"同样多"的. 但这样想象上的直观性当然不能等于逻辑上的显然性. 从逻辑推演的角度来说，当 $A \trianglelefteq B$ 并且 $B \trianglelefteq A$ 时，仅仅是指存在单射 $f: A \rightarrow B$ 和单射 $g: B \rightarrow A$. 但在这里出现的单射 f 和 g 似乎没有理由必须具备某种关联性. 在它们之间，应当有更多理由允许它们各自保持自己的独立性. 这样，怎么能由互不关联的 f 和 g 去判定 A，B 之间一定存在某个双射呢？

但是，直观显然性毕竟为我们提供了证明两者等势的可能性. 按照等势的条件，无论如何我们只需要在 A 和 B 之间找出某个双射就可以了. 为此，我们不妨逆向思考：假如 $A \approx B$ 为真，则必定存

在某个 A 与 B 之间的双射;现在既然有 $A \triangleleft B$ 并且 $B \triangleleft A$,则一定存在单射 $f:A\to B$ 和单射 $g:B\to A$,那么,我们为什么不可以首先通过这样的单射 f 和 g 来设法构造我们所需要的双射呢?

对于上述提出的问题,我们可以先设想一种比较理想的情况,即设 $f:A\to B,g:B\to A,f,g$ 都是单射,并且它们的射法恰好和右图反映的一样,即



在上图中,我们把集合 A 和 B 分拆成互不相交的 A_1,A_2 和 B_1,B_2 各两部分,使 f,g 在它们上面的作用既互补又互不干扰,即恰好有 $B_1=f(A_1),A_2=g(B_2)$,那么,

$$(f \mid A_1) \cup (g \mid B_2)^{-1}$$

就应该是由 A 到 B 上的双射了.

当然,上面所设想的情况,只是"分拆"集合 A,B 的一种理想状况,下面首先要证明的是,当实际情况并非如此理想时,由于只需要找到一个双射就可以了,因此,对建立在任意两个集合上的任两个映射 f 和 g 来说,这样的"分拆"工作还是可以进行的.

引理　设任意给定集合 A,B 和任意给定映射 $f:A\to B$, $g:B\to A$,则存在 A_1,A_2 和 B_1,B_2,使得

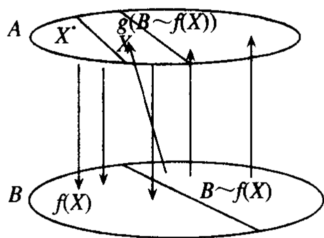
1. $A=A_1\cup A_2$ 并且 $B=B_1\cup B_2$,并且 $A_1\cap A_2=B_1\cap B_2=\varnothing$;

2. $f(A_1)=B_1$ 并且 $g(B_2)=A_2$.

由于我们对 f,g 除了知道它们是映射以外,其他一无所知,不妨任取 $X\subseteq A$,用 f 把 X 映射为 $f(X)\subseteq B$,然后在 B 集中取差集 $B\sim f(X)$,用 g 将它映射为 $g(B\sim f(X))\subseteq A.$,再取 A 中的剩余部分,记为

$$X^{\cdot}=A\sim g(B\sim f(X)).$$

如下图，假如 $X = X^{*}$，则可令 $X = A_1, f(X) = f(A_1) = B_1$，那么，问题就是前面所提到的理想状况，当然问题也就解决了.



但由于 $g, f, X \subseteq A$ 都是任意的，因此，X 与 X^{*} 的关系也就可能是多种多样的. 比如说，X 与 X^{*} 的交集可能是空集，也可能不是空集. 当两者的交集非空时，可能有 $X^{*} \subseteq X$，也可能 $X \subseteq X^{*}$，还可能两种都不是 …… 现在的问题是，我们并非对上述的每一种可能都有兴趣. 我们的兴趣只在于能够找到一个满足引理条件的双射，为此去"分拆"集合 A, B 而已. 所以，在上述各种可能的关系中，我们可以逐一地考虑. 例如，我们可以先考虑使 $X^{*} \subseteq X$ 的这样的 A 的子集 X^{*}，假如最后表明这一种情况无法实施分拆工作，不妨再考虑使 $X \subseteq X^{*}$ 那些 A 的子集 X^{*}，如此等等. 这里，我们约定只考虑使 $X^{*} \subseteq X$ 的这样的 A 的子集 X^{*}，并暂时将这些称为 A 的"正规"子集，记为 A^{*}. 显然，A 是 A 自己最大的一个"正规"子集，并且，只要 f 不是 A 到 B 上的双射，就不会有 $A = A^{*}$.

下面，我们考虑 A 的所有"正规"子集中最小的一个. 它显然应当是所有"正规"子集的交集. 它可能会满足引理题设的要求，当然，这种可能性能否成为现实，就只有依靠逻辑证明了.

证明：对于任意给定的 $X \subseteq A$，设 X^{*} 定义如上，即

$$X^{*} = A \sim g(B \sim f(X)).$$

1. 如果 $X_1 \subseteq X_2 \subseteq A$，那么 $X_1^{*} \subseteq X_2^{*}$.

这是因为，$X_1 \subseteq X_2 \to f(X_1) \subseteq (f(X_2)$

$\to B \sim f(X_2) \subseteq B \sim f(X_1)$

$\to g(B \sim f(X_2)) \subseteq g(B \sim f(X_1))$

$\to A \sim g(B \sim f(X_1)) \subseteq A \sim g(B \sim f(X_2))$

$$\to X_1^* \subseteq X_2^*.$$

2. 设 $M = \{X \in \wp(A) \mid X^{\cdot} \subseteq A\}$，即 M 是 A 的幂集中那些使得如上构造的 $X^{\cdot}$ 还是 A 的正规子集的子集的集合，那么，如上所说，A 是 A 最大的正规子集，所以有 $A \in M$，故 $M \neq \varnothing$. 由交集的定义，$\bigcap(M)$ 存在. 不妨令 $A_1 = \bigcap(M)$，下面我们证明，$A_1 = A_1^{\cdot}$.

事实上，对任意的 $X \in M$，$A_1 \subseteq X$，所以，由 1 所证，必然有 $A_1^{\cdot} \subseteq X^{\cdot} \subseteq X$；再由 A_1 的定义，有 $A_1 \in M$，并且由 $X \in M$ 的任意性，所以 $A_1^{\cdot} \subseteq A_1$.

另一方面，由证明 1，有

$$A_1^{\cdot} \subseteq A_1 \to A^{\cdot\cdot} \subseteq A_1^*,$$

即有

$$A_1^{\cdot\cdot} \subseteq A_1^{\cdot},$$

可见，$A_1^{\cdot} \in M$，由 A_1 的定义，必然有 $A_1 \subseteq A_1^{\cdot}$，所以，由子集定义和外延公理，有

$$A_1^{\cdot} = A_1.$$

3. 由上述证明，不妨令 $B_1 = f(A_1)$，$B_2 = B \sim f(A_1)$，$A_2 = g(B_2)$，则由 $A_1^{\cdot}$ 的定义和已证，有

$$\begin{aligned}
A_1 &= A_1^{\cdot} \\
&= A \sim g(B \sim f(A_1)) \\
&= A \sim g(B_2) \\
&= A \sim A_1, \\
B_1 &= f(A_1) \\
&= B \sim B_2.
\end{aligned}$$

可见，A_1, A_2, B_1, B_2 全部满足引理中的所有要求，故引理成立.

下面，我们利用引理来证明 S－B 定理：设引理中的映射 f, g 都是单叶的，则

$$f \mid A_1 : A_1 \to B_1$$

和

$$g \mid B_2 : B_2 \to A_2$$

都一定是双射. 不妨令

$$h = (f \mid A_1)(g \mid B_2)^{-1},$$

则 h 一定是从 A 到 B 上的双射，所以，

$$\forall A \forall B(A \lhd B \wedge B \lhd A \to A \approx B).$$

由等势和受制关系都具有传递性，因此不难验证S－B定理与下面的定理是等价的.

定理 对任意的集合 A,B,C，

$$A \lhd B \lhd C \wedge A \approx C \to A \approx B \approx C.$$

这是因为由 $A \approx C$，则 $C \lhd A$，由已知和受制的传递性，有 $B \lhd C$，再由S－B定理，可推出 $B \approx C$，由等势的传递性和已知，必然有

$$A \approx B \approx C.$$

推论 $A \subseteq B \subseteq C \wedge A \approx C \to A \approx B \approx C.$

由上述已证定理，推论的成立是不言而喻的.

等势、受制都反映的是集合之间的元素数量关系，由此我们引入一个数量上比较方面的概念，对以后问题的讨论是较方便的.

定义 对任意集合 A,B，若 $A \lhd B \vee B \lhd A$ 成立，则称 A,B 是可较的.

两个集合是否一定可较，从定义上看，本质上是在这两个集合之间能否找到某个单射. 对这一问题的讨论，我们留给后面的章节去进行.

第四节　选择公理

一、选择公理的实例

设 f 是定义在开区间 (α,β) 上的实值无界函数，即对无论如何大的正实数 M，总有 $x \in (\alpha,\beta)$，使得 $|f(x)| > M$ 成立. 现在，把 M 限定为正实数中的自然数，设为 n，0 可利用拓展的方式加以补充. 则上面定义的函数可以表示为：对任意的 $n \in \omega$，都有 $x \in (\alpha,\beta)$ 使得 $|f(x)| > n$. 可见，对每一个自然数 n，都可以得到一个相应的非空集合，记为 A_n，如

$$A_0 = \{x \in (\alpha,\beta) \mid |f(x)| > 0\},$$
$$A_1 = \{x \in (\alpha,\beta) \mid |f(x)| > 1\},$$
$$A_2 = \{x \in (\alpha,\beta) \mid |f(x)| > 2\},$$
$$\cdots\cdots$$

现在，我们从每个集合 A_i 中任取一个元素，记为 a_i，于是可以得到一个数列

$$(a_i)_{i\in\omega}.$$

显然，对于每个 $i \in \omega$，都有 $a_i \in (\alpha,\beta)$，使得 $|f(a_i)| > i$.

由上述构造过程可知，数列 $(a_i)_{i\in\omega}$ 是从 ω 到 (α,β) 内的一个确定的函数. 但是，由于对任一个 $i \in \omega$，a_i 都是从 A_i 中任意选取的，从表面上看，选谁或者不选谁都是无法给出明确的选择法则的，就此而言，一方面如此构造函数的方式同函数的本质是相悖的，但另一方面其构造的结果 $(a_i)_{i\in\omega}$ 却又确实是一个函数. 下面介绍的选择公理，就是希望从公理的角度来承认这种函数的构造方式也是

合理的.

二、选择公理

公理　从非空集组成的非空族的每一项里,可以选出一个元素,并由所有的这样的元素构成一个族.

选择公理等于说:对于给定的集族$(A_i)_{i\in\omega}$,其中,标集 $I\neq\varnothing$,并且对每个 $i\in I$,$A_i\neq\varnothing$,那么,存在某个族$(a_i)_{i\in I}$,使得对于任一 $i\in I$,$a_i\in A_i$. 如在上述例中,$I=\omega$,$(A_i)_{i\in I}=(A_i)_{i\in\omega}$,由选择公理,保证了数列(族)$(a_i)_{i\in\omega}$的合理存在.

选择公理又叫策梅罗公理,由策梅罗于 1904 年提出. 公理唯一的条件是族非空并且族的元素为非空集. 由于公理既不能给出明确的选择法则,但又承认至少有一个这样的选择是合理的,所以一开始就遭到了不少人尤其是数学家的非议. 反对选择公理的主要理由是:选择公理只断定选择出来的元素可以构成集合,但选择出来的元素具有什么样的共性?这是不清楚的,既然一个集合的元素的基本性质都是不清楚的,因此从已经建立起来的集合理论来看,这样的集合似乎是不能定义的.

非难选择公理的某些学者,利用选择公理提出了一个"分球定理":即一个闭球体 W 可以分为两个不相交的子集 u 和 v 的并,使得 W 和 u,v 中的任何一个都能经过有限分割而叠合. 这等于是说:承认选择公理,就得承认可以把一个球分为同原球大小相同的两个球.

其实,"分球定理"原本希望能由此否定选择公理,但它所揭示的现象,却和在集合论中揭示并证明了的许多集合现象并不存在本质上的差异. 概括地说,一个集合不仅可以同其某个真子集等势,而且还可以同其无限多个真子集同时等势. 这表明,一个集合不仅可以同其某个真子集的元素,而且还可以同其无限多个真子

集的元素同时"配对同样多",因此从集合的角度看,它们是"同样大"的.非难选择公理的人们在这些问题上通常缄口不言,是因为这些问题都是纯逻辑的,依赖于逻辑的推理论证而不是经验或者理性直观."分球定理"揭示的怪异却恰好是依赖于人们的经验和直观的.事实上,从人们的实践方面来看,如果否定选择公理,那么不但现代数学分支的许多内容就会被否定,甚至连类似于"可数个可数集的并集仍然是一个可数集"这样基本的证明我们也无法进行.不仅如此,实践还证明了,没有选择公理还可以导致产生更多的奇怪定理,它们之"怪"更甚于"分球定理".

对选择公理的怀疑,从公理化的构成过程来看,应当是合理的.但怀疑归怀疑,选择公理及其等价命题却依然是目前集合论及其他数学分支中一些重要的理论的依据.并且,1938年,哥德尔(K. Gödel)的证明表明了,在我们目前所使用的公理系统FM中,是完全无法否定选择公理的.我们在这样的系统中必须承认它,并且把它作为我们的基础理论之一.

三、选择公理的其他表述形式

选择公理有许多不同的表达方式.以下两种是被人们经常引用的方式.

(一)由笛卡尔积定义的选择公理.

公理 由非空集合组成的非空族,其诸项的笛卡尔积是非空的.

由笛卡尔积定义的选择公理等于是说,对给定的集合族$(A_i)_{i\in\omega}$,只要其中的$I\neq\varnothing$,并且对任意的$i\in\omega$,$A_i\neq\varnothing$,则$\underset{i\in I}{\times}A_i\neq\varnothing$.

由笛卡尔积陈述的选择公理实际上回答了这样一个问题:如

果一个集族不是空集，并且它的每一项也不是空集，那么，集族诸项的笛卡尔积 $\underset{i\in I}{\times} A_i$ 是否也不是空集？从选择公理的角度看，从非空集族的每一个非空元素即项中任选一个元素，并且由此构成一个新的集合是完全能够做到的，既然 A_i 不是空集，因此它至少存在一个元素，当然 $\underset{i\in I}{\times} A_i \neq \varnothing$.

(二) 由函数定义的选择公理

公理 对于每个非空集合 A，存在函数 φ（称为 A 的选择函数），φ 从 A 的每一个非空子集中选出一个元素.

由函数定义的选择公理等于是说：设集合 $A \neq \varnothing$，则存在函数 φ，且

$$\varphi: \wp(A) \sim \{\varnothing\} \to A,$$

使得

$$\varphi(B) \in B.$$

其中，$B \in \wp(A) \sim \{\varnothing\}$，即为 A 集的非空子集.

由函数定义的选择公理，与策梅罗一般陈述的选择公理当然还是一致的.

一方面，对于给定的非空集合 A，A 的一切非空子集构成一个集组设为 I，且 $I = \wp(A) \sim \{\varnothing\}$. 由集组与集族的转化关系，只需令 ψ 是 I 上的恒等函数，就可以得到一个集族 $(\psi(B))_{B\in I}$. 其中，对任一 $B \in I$，都有 $\psi(B) = B$. 由选择公理，那么一定存在一个集族 $(\varphi(B))_{B\in I}$，使得对于任一 $B \in I$，都有 $\varphi(B) = \psi(B) = B$. 这无疑表明，从上述条件我们可以推出下面的命题：

对于给定的非空集合 A，存在函数 $\varphi: \wp(A) \sim \{\varnothing\} \to A$，使得对于 A 的每个非空子集 B 都有：$\varphi(B) \in B$.

另一方面，如果我们承认上述命题，那么，如果给定集族 $(A_i)_{i\in I}$，要求其中的 $I \neq \varnothing$，并且 $A_i \neq \varnothing$，那么，可设 $U = \bigcup A_i$，则 $U \neq \varnothing$，并且每个 A_i 都是 U 的非空子集，按所述命题，存在函数

$$\varphi:\wp(U)\sim\{\varnothing\}\to U,$$

使得对于 U 的每个非空子集 B，都有 $\varphi(B)\in B$，特别地，对于 $\wp(U)$ 中的每个 A_i，都有 $\varphi(A_i)\in A_i$. 现在记

$$a_i=\varphi(A_i),$$

此即 $a=\varphi\cdot A$，于是，我们得到族

$$(a_i)_{i\in I}.$$

显然，其中的 $a_i\in A_i$. 这样，我们就得到了策梅罗所定义的选择公理.

描述选择公理的方式虽然很多，但我们不可忘记，每一种方式所针对的对象应该是无穷集.

四、选择公理的一个应用

定理　设集合 $A\neq\varnothing$，则对任意集合 B，存在单射 $f:A\to B$，当且仅当存在满射 $g:B\to A$.

证明：先看充分性.

设存在单射 $f:A\to B$，则

$$f:A\to f(A),$$

其中 $f(A)\subseteq B$，就是由 A 到 $f(A)$ 上或者是由 A 到 B 内的一个双射. 逆映射 f^{-1} 当然也是由 $f(A)$ 到 A 上的双射. 现在对集合 B 的其余元素即 $B\sim f(A)$，一律让它们同某个 A 的固定的元素如 a 对应，因为 $A\neq\varnothing$，所以这样的元素 a 肯定会存在. 那么，这样的作法就等于是说，必定存在从 B 到 A 的一个映射 $g:B\to A$，定义 g 为

$$g(y)=\begin{cases}f^{-1}(y) & y\in f(A),\\ a & y\in B\sim f(A).\end{cases}$$

显然，映射 g 就是从 B 到 A 上的满射.

再证明必要性.

设映射 $g:B\to A$ 是满射. 如果对应同一个 $x\in A$ 的 $y\in B$ 是

唯一的，则 g 是从 B 到 A 的单射，那么，g^{-1} 就是从 A 到 B 的单射；如果这样的 y 不是唯一的，那么在这些不唯一的 y 中，我们只选择一个与 x 对应，而其他的我们置之不理就可以了.这相当于说，我们可设集合 $B_x=\{y\in B \mid g(y)=x\}$，并由此可得集族 $(B_x)_{x\in A}$. 由于 $A\neq\varnothing$，g 是由 B 到 A 的满射，所以，必然有每个 $A_x\neq\varnothing$. 那么，由选择公理，存在映射 $f:A\to B$，使得对于任意的 $x\in A$，都有

$$f(x)\in B_x,$$

并且，有

$$g(f(x))=x.$$

那么，这个从 A 到 B 上映射 f 必然是单叶的.这是因为，对任意的 $x,z\in A$，有

$$\begin{aligned}&f(x)=f(z)\\ &\to g(f(x))=g(f(z))\\ &\to x=z.\end{aligned}$$

推论　设集合 $A\neq\varnothing$，则对任意集合 B，A 受制于 B，当且仅当存在满射 $g:B\to A$.

由受制的定义和已证，推论的真是显然的.

第五节　可数集与一般无穷集

一、可数集

定义　集合 A 可数，当且仅当 $A \lhd \omega$.

例如正有理数集合. 我们记正有理数集为 Q^+，则

$$Q^+ = \{\frac{m}{n} \mid m,n \in \omega \land n \neq 0\}.$$

现在构造集合 A，令

$$A = \{(m,n) \mid m,n \in \omega \land n \neq 0\},$$

显然，$A \approx Q^+$. 但由 A 的构造和已证

$$A \subseteq \omega \times \omega \approx \omega,$$

所以

$$A \lhd \omega,$$

由此推之，必然有

$$Q^+ \lhd \omega.$$

由定义，集合 Q^+ 是可数的.

由受制的定义，$A \lhd \omega \leftrightarrow A \approx \omega_x \subseteq \omega$. 这种关系一方面表明，若 ω_x 为有限集时，A 也是有限集. 我们已证明，任何一个有限集都同某个唯一的自然数等势，这就意味着凡有限集都是可数集. 当 ω_x 为无限集时，定义则表明，能够与自然数集的任一子集（包括自然数集合）等势的任一无限集也都是可数集；另一方面，这种关系提供了判定集合是否可数的一种方法，即看它是否与自然数集的某个子集等势. 例如，我们仍以上面的判定为例. 我们构造集合

$$B = \{m \mid m \in \omega \wedge m \neq 0\},$$

显然,由 A 和 B 的构造方式,有

$$B \times B \approx B,$$

(这只需要在 $\omega \times \omega \approx \omega$ 的证明中分别在 $\omega \times \omega$ 和 ω 去掉点 $(0,0)$ 和 0 即可),并且有

$$B \times B \approx A,$$

所以,由等势的传递性有

$$A \approx B \approx Q^{+}.$$

显然,由 B 的构造,$B \subseteq \omega$,因此,由 $Q^{+} \approx B \subseteq \omega$,有 $Q^{+} \lhd \omega$,即 Q^{+} 是可数的.

可数集的基本性质

1. 可数集的任一子集可数.

证明:设集合 A 是可数集,则 $A \lhd \omega$. 若 $B \subseteq \omega$,则 $B \lhd A$,由"$\lhd$"的传递性,$B \lhd \omega$,即 B 是可数的. 再由集合 A,B 的任意性,故可数集的任一子集都可数.

2. 若可数集组的每个成员都可数,则集组成员的并集也可数.

证明:设集组 M 可数,并且 M 的每个成员也都可数. 那么,

如果 $M = \varnothing$,则 $\bigcup(M) = \varnothing$,而已证 $\varnothing \approx 0 \subseteq \omega$,所以 $\varnothing \lhd \omega$,故 $\bigcup(M)$ 可数.

如果 $M \neq \varnothing$,并且 M 的成员也不是空集,那么,由 M 可数且非空,有 $M \lhd \omega$. 现在由前面所证,必定存在由 ω 到 M 的满射 A: $\omega \to M$,使得对任意的 $m \in \omega$,都有 $A_m \in M$,这就等于说 A_m 总与 M 中的某个确定的成员相对应. 既然如此,不妨以集族 $(A_m)_{m \in \omega}$ 的诸项 A_m 的并集即 $\bigcup_{m \in \omega} A_m$ 来取代 $\bigcup(M)$,由前面已证,这样的取代总是可以实现的. 显然,如果 $\bigcup_{m \in \omega} A_m$ 是可数的,那么 $\bigcup(M)$ 也就是可数的.

由已知,M 的每个成员非空且可数,这也等于说,对于任意确

定的 $m \in \omega$，A_m 也是可数的，并且也有 $A_m \neq \varnothing$. 由 A_m 可数，有 $A_m \triangleleft \omega$，于是，同样存在从 ω 到 A_m 上的满射，但这样的满射对每个确定的 $m \in \omega$ 来说，可能并不是唯一的，我们需要从每个确定的 $m \in \omega$ 的那些所有可能的满射中选出一个确定的满射来.

为此，不妨设 F 是定义在 ω 上的函数，F_m 为一切从 ω 到 F_m 的所有满射的集合. 显然，此时

$$(F_m)_{m \in \omega}$$

构成一个合法的族. 由选择公理，可以从它的每一项 F_m 中选出一个满射令为 g_m，从而也构成一个相应的族

$$(g_m)_{m \in \omega}.$$

显然，选择公理的确立保证我们以此方式选出的每个 g_m 对确定的 $m \in \omega$ 来说，都是从 ω 到 A_m 的一个完全被确定的满射.

现在我们设

$$f(m,n) = g_m(n),$$

其中 $m,n \in \omega$，等式右边的含义十分明显，它表达的是对确定了的那个 $m \in \omega$，因此也确定了的从 ω 到 A_m 的所有满射中所选定的那个满射 g_m 在 n 点的函数值，并且有 $g_m(n) \in A_m$；等式的左边 f 是一个更一般的函数表达式. 现在，由

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{m \in \omega} A_m &\rightarrow \exists m \in \omega(x \in A_m) \\ &\rightarrow \exists m,n \in \omega(x = g_m(n) = f(m,n)). \end{aligned}$$

这个结果表面明，f 就是从 $\omega \times \omega$ 到 $\bigcup_{m \in \omega} A_m = \bigcup(M)$ 的满射，由已证，有

$$\bigcup(M) \triangleleft \omega \times \omega \approx \omega,$$

即

$$\bigcup(M) \triangleleft \omega,$$

所以，$\bigcup(M)$ 是可数的.

应当注意的是，性质 2 中给出的集组在有限或者无限方面是

没有附加条件的，故无论给出的集组是有限还是无限，性质 2 都是应当成立的．例如，以 Z 记整数集，并设

$$Z = Z^{+} \cup Z^{-} \cup \{0\},$$

其中，Z^{+}，Z^{-} 分别表示正整数集和负整数集．容易证明，

$$Z^{-} \approx Z^{+} \approx \omega,$$

所以，Z^{-}，Z^{+} 都是可数的．而$\{0\}$ 可数是显然的，故它们的并集即 Z 也是可数的．同样，若以 Q，Q^{+}，Q^{-} 分别记有理数、正有理数和负有理数集合，那么由 Q^{+}，Q^{-} 可数并且$\{0\}$ 可数，必然推出 Q 也可数．

二、可数集与无穷集的关系

定理　任何无穷集都存在与自然数集 ω 等势的子集．

由等势与受制的关系，上面的定理也可表述为：对任意集合 A 都有，A 无穷，则 $\omega \lhd A$．定理的真是不言自明的．例如，设无穷集 $A = \{a, b, c, d, \cdots\}$，我们可以自然数集中元素的顺序为集合 A 的元素编序，如令 $a = \alpha_0$，$b = \alpha_1$，$c = \alpha_2$ 等，于是，我们可以得到集合 $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots\}$，显然有

$$\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots\} \subseteq A.$$

但由$\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots\}$ 集的构造过程，映射 $f: \omega \to \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots\}$ 显然是由 ω 到$\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots\}$ 上的一个双射，只需令 $f(n) = \alpha_n$ 即可．故必然有

$$\omega \approx \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots\} \subseteq A.$$

推论　集合 A 可数，当且仅当 A 有限或者 $A \approx \omega$．

证明：A 有限或者 $A \approx \omega$，则 A 是可数的，这是显然的．现在设 A 是可数的，则 $A \lhd \omega$．那么，或者 A 是有限集，当然 A 可数；或者 A 是无穷集，那么由上述已证定理，必然有 $\omega \lhd A$，由已知，必然有 $A \approx \omega$．综上所述，推论成立．

以上的定理和推论，实际上表明了 ω 是元素"最少"的无穷集．

并且，如果以 ω 集为一参照，可以把无穷集区分为可数无穷集和不可数无穷集两类；同样，若以 ω 集为一参照，也可以把可数集区分为两类，即有限可数集和无限可数集.

三、有限集与无限集的区别

定理　如果集合 A 是无穷集，则 A 与其某一真子集等势.

定理断定的是，若 A 是无穷集，则有集合 $B \subset A$，使得 $A \approx B$.

证明：如果 A 是无穷集，由已证，有 $\omega \triangleleft A$，由“受制”的性质，必然存在单射 $g:\omega \to A$. 现在，我们从集合 A 中除去元素 $g(0)$，即有集合 B，并且

$$B = A \sim \{g(0)\},$$

显然，集合 B 是 A 的一个真子集.

以下，我们用这样的方式在 A,B 之间构造一个一一对应的映射 f：即对于每个 $g(n) \in A$，都让 $g(n^+)$ 与之对应，如 $g(0) \in A$，$g(1) \in A$，$g(2) \in A$ 等，在 f 的作用下，分别有

$$f(g(0)) = g(1),$$
$$f(g(1)) = g(2),$$
$$f(g(2)) = g(3)$$

等，而对其他的 $x \in A$，就让同一个 $x \in B$ 与之对应. 由集合 B 的构造方式，只要 $x \neq g(0)$，那么，这样的 x 必然是既属于 A 又属于 B 的. 这样，我们在 A 与 B 之间实际上建立了一个新的映射即 f：$A \to B$，f 被定义为

$$f(x) = \begin{cases} g(n^+) & x = g(n), n \in \omega, \\ x & x \notin \text{ran}(g). \end{cases}$$

显然，由此定义的 f 必然是从 A 到 B 上的双射，所以有

$$A \approx B.$$

我们在前面的讨论中曾证明过，A 若与其某一真子集等势，则

A 是无穷集，现在，把这个结论同刚刚证明的定理结合起来，我们有：

集合 A 无穷，当且仅当 A 同它的某个真子集等势.

利用上面命题中前后件的关系，又有：

集合 A 有限，当且仅当 A 同它的任何一个真子集都不等势.

因此，能否同其至少一个真子集等势，就成为有穷集与无穷集合的根本区别.

思考与练习

1. 验证：(1)$3 \approx \{1,2,3\}$； (2)$4 \approx \wp(\wp(\wp(\varnothing)))$.

2. 证明：(1)$A \approx B \rightarrow A^C \approx B^C$； (2)$C \approx D \rightarrow A^C \approx A^D$.

3. 证明：两个有限集的并集还是有限集.

4. 证明：两个有限集的笛卡尔积还是有限集.

5. 试用归纳原理证明：若 A 是有限集，其元素个数 $N(A) = n$，则 A 的幂集 $\wp(A)$ 的元素个数 $N(\wp(A)) = 2^n$.

6. 设给定自然数 $n \in \omega$，证明：由一切不小于 n 的自然数构成的集合 $T_n = \{m \in \omega \mid m \geqslant n \in \omega\}$ 为一无穷集.

7. 给定集组 M，试用归纳原理证明：若 M 有限并且 M 的任意成员有限，则 $\bigcup(M)$ 还是有限集.

8. 给定有限集 A,B，并且设 $N(B) < N(A)$，证明，任何从 A 到 B 内的映射 f 都不能是单射.

9. 证明：$A \lhd B \wedge C \lhd D \rightarrow A \times C \lhd B \times D$.

10. 证明：对于任意给定的非零自然数 n，及有限族 $(A_i)_{i\in n}$，若其中的每个 $A_i \approx \omega$，证明：$\underset{i\in n}{\times} A_i \approx \omega$.（提示：对 n 用归纳原理）

11. 证明：对于任意给定的非零自然数 n，由自然数组成的所有 n 项序列 $(m_i)_{i<n}$ 的集合与 ω 等势（每个 $m_i \in \omega$）.

12. 如果集合 A,B 都与实数区间 $(0,1)$ 等势，则 $A \times B \approx (0,1)$.

第七章　序　集

“序”在集合中的应用，是数的基本概念顺序的一个推广，随着认识范围的扩大，相对于数的顺序的条件也有所放宽.

第一节　序集

在讨论集合的最初阶段，我们曾经讨论过序偶(a,b)，它所涉及的仅仅是两个集合的顺序问题. 以下，我们在自然数顺序的基础上，把这一问题的讨论推向一般的所有集合上去.

一、序集的概念

定义　设给定任意集合A和A中的一个关系R，当且仅当对任意的$x,y,z \in A$，都满足

1. 自返性：xRx；
2. 反对称性：$xRy \wedge yRx \to x = y$；
3. 传递性：$xRy \wedge yRz \to xRz$.

则称关系R是集合A的一个偏序，并称(A,R)为一序集.

由关系的定义，上述定义中的关系R，显然是以A集的元素为对象所建立起来的一个集合，或者说，必然有

$$R \subseteq A \times A.$$

从集合的角度看，它满足

(1) $(x,x) \in R$;

(2) $(x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \rightarrow x = y$;

(3) $(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \rightarrow (x,z) \in R$.

定义以简单的序偶形式 (A,R) 表明，任意一个集合和建立在该集合上的一个偏序，就构成一个序集. 但并不是任意的关系对任意的集合而言，都是能构成序集的. 例如，对自然数集 ω 来说，建立在自然数集元素基础之上的“$>$”，“$<$”关系，由于它们对任意自然数都不能满足偏序定义中的条件1，所以它们都不能成为 ω 的偏序，当然 $(\omega, <)$ 或者 $(\omega, >)$ 都不能是序集. 而对关系“$=$”，“$\geqslant$”，“$\leqslant$”等来说，容易验证 $(\omega, \geqslant)$，$(\omega, =)$，$(\omega, \leqslant)$ 等都是满足定义条件的序集.

作为对序集定义的理解，我们来看一些常用序集的实例.

$(\varnothing, \varnothing)$ 是一序集.

在前面章节的讨论中我们曾经证明，空集 $\varnothing$ 中的唯一关系就是 $\varnothing$. 显然，设定任意的元素 $x,y,z \in \varnothing$ 都一定是错误的，故在此错误的设定下，$\varnothing$ 作为关系断定它满足偏序的任意条件都是正确的，当然，满足定义中的所有条件也是正确的，所以 $(\varnothing, \varnothing)$ 是序集.

$(\{a\}, =)$ 是序集.

单集 $\{a\}$ 中唯一的非空关系是“$=$”关系. 可以检验，对于单集 $\{a\}$ 的任意元素 a 来说，“$=$”关系必定满足偏序定义中的所有条件，所以“$=$”关系是建立在单集 $\{a\}$ 中的一个偏序，因此，$(\{a\}, =)$ 应当是序集.

需要注意的是，“$=$”关系其实是任意集合的偏序，由于偏序本身还是集合，所以“$=$”关系一定是任意偏序的偏序.

设给定任意集组 M，“$\subseteq$”是建立在 M 元素基础之上的一个包

容关系，则$(M, \subseteq)$是一个序集.

可以验证，在M元素基础之上建立的关系“$\subseteq$”满足偏序的所有条件，因此，它是M的一个偏序. 我们以后称建立在集组M元素基础之上的包容关系为包容序.

可以认为，包容序是数学中顺序概念被推广为集合概念的典型例子. 在数学中，实数集中的任意两个元素x,y，在顺序上或者$x \geqslant y$，或者$x \leqslant y$，其中至少有一个会成立. 但对于一般集合中的任意两个元素来说，不一定会对应地具备这一性质，即若x,y是某一集合的两个元素，则$x \subseteq y$或者$y \subseteq x$完全可能都不会成立. 例如，令

$$\wp(3) = \{0,\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{0,1,2\}\},$$

显然，其中有许多的元素都是无法用“$\subseteq$”去联结的. 在后面的讨论中，我们约定以符号“$\leqslant$”来抽象一般的偏序. 相信有了以上的说明，我们不会把这个符号同数学中的“$\leqslant$”混为一谈了.

二、全序集

定义　设$(A, \leqslant)$是任意给定的序集，若对任意的$x,y \in A$，当且仅当$x \leqslant y$与$y \leqslant x$中至少有一个成立时，称x和y是可较的.

例如，在上述所给集合$\wp(3)$中，若“$\leqslant$”表达的是包容序“$\subseteq$”，那么，0和$\wp(3)$的任何一个元素都是可较的；但$\{1,2\}$和$\{0\}$显然是不可较的.

全序(线性序)的定义　设给定序集$(A, \leqslant)$，当且仅当对任意的$x,y \in A$，x与y都是可较的，称$(A, \leqslant)$为一全序集(或称为一线性集). 并称此时的“$\leqslant$”是A的一个全序.

例如，$(\varnothing,\varnothing)$，$(\omega, \leqslant)$(此时的“$\leqslant$”表达的是包容序“$\subseteq$”)，$(\{\alpha\}, =)$都是全序集，而上面提到的$\wp(3)$对“$\subseteq$”关系来说就不

是一个全序集.

下面,我们把表达偏序的符号"$\leqslant$"作一个一般的延伸:

定义 对于序集$(A, \leqslant)$及对任意的$x, y \in A$,当且仅当$x \leqslant y$并且$x \neq y$时,记$x < y$. 并且在上述两定义的前提下,我们称关系"$\geqslant$","$>$"分别是关系"$\leqslant$","$<$"的逆关系.

上述定义只是把数量关系中的顺序概念在集合的元素顺序上作了一种推广,我们可以把它理解为,当且仅当偏序"$\leqslant$"对A的任意两个元素x和y来说,都有x和y是可较的但$x \neq y$,则可记为$x < y$.

可以验证,作出上述推广后,相对于数集中这些符号的使用方式来说,尽管形式是一致的,但对于一般的序集来说,有的性质却发生了变化. 例如对于数集的三歧性来说,在数集中有对任意的$m, n \in \omega$,都有

$m = n, m < n$和$n < m$中恰好有一个成立.

但对于一般的序集来说,三歧性却只有一半是成立的,故我们把它称为半三歧性,即对任意的$x, y \in A$,若"$\leqslant$"是A的偏序,则

$x = y, x < y$和$y < x$中最多有一个成立.

这是因为,由"$<$"的定义,$x < y, y < x$分别同$x = y$是不相容的;此外,如果$x < y$与$y < x$是相容的,由定义,也就是$x \leqslant y \wedge x \neq y$与$y \leqslant x \wedge y \neq x$相容,显然有$x \leqslant y \wedge y \leqslant x$成立,但按偏序的定义,立即有$x = y$成立,这同$x \neq y$构成矛盾,所以,$x < y$与$y < x$不可能是相容的,三者中最多有一个成立.

又如,传递关系在数集中是成立的,即对任意的$m, n \in \omega$来说,都有

$$n < m \wedge m < l \rightarrow n < l.$$

但对一般的序集来说,尽管在形式上也保留有对任意的$x, y, z \in A$

$$x < y \wedge y < z \rightarrow x < z,$$

但这个形式所反映出来的性质却是不同的. 因为按"$<$"的定义,

形式 $x < y \land y < z$ 意味的是

$$(x \leqslant y \land x \neq y) \land (y \leqslant z \land y \neq z),$$

它所能蕴涵的是

$$\begin{aligned} & x \leqslant y \land y \leqslant z \land x \neq y \land y \neq z \\ & \to x \leqslant y \land y \leqslant z \\ & \to x \leqslant z(\text{偏序的传递性}). \end{aligned}$$

但实际上我们只能推出 $x < z$. 因为,如果肯定 $x = z$,那么由 $x \leqslant y \land y \leqslant z$ 就能推出 $x = y$,这显然是同已知 $x \neq y$ 是矛盾的.

由此可知,在与数集相同的这些形式表达方式中,一般集合的偏序"$\leqslant$"都必须除开三歧性的另一半:即至少有一种成立的断定,其他的才是相同的.

但是,如果"$\leqslant$"表达的是一个全序,情况则不相同,此时上述形式所表达的不但在形式上同数集是相同的,而且在性质上所反映的同数集所反映的也是相同的.我们因此有以下的断定:

设"$\leqslant$"是集合 A 的一个偏序,"$\leqslant$"是全序当且仅当对任意的 $x,y \in A$,都有 $x < y$,$x = y$ 和 $y < x$ 中至少有一个是成立的.

这个断定由全序的定义来看其正确性是不言而喻的.

以上我们建立了偏序、全序、序集等概念,在下面的讨论中,在不至于引起误解的前提下,为了避免在讨论中涉及过多的符号和导致形式上的过于繁琐,我们将始终把序集 A 记为$(A, \leqslant)$.

第二节　良序集

本节从推广自然数集中的最小数概念出发，讨论在一般序集中的与最小数原理有关的各种问题.

一、最小(大)元的概念

定义　给定序集 A，当且仅当存在 $a \in A$，使得对任意的 $x \in A$，都有 $a \leqslant x$，则称 a 是序集 A 的最小元；当且仅当存在 $a \in A$，使得对任意的 $x \in A$，都有 $x \leqslant a$，则称 a 是序集 A 的最大元.

定义反映了序集 A 的最小(大)元的两个特征，即

1. 最小(大)元必须是序集 A 的元素；

2. 最小(大)元应当是和序集 A 的任一元素都可较的.

如前面提到的集合 $\wp(3)$ 和包容序"$\subseteq$"，0 必定是它的最小元，而 $\{0,1,2\}$ 必然是它的最大元. 并且集合 $\wp(3) \sim \{0\}$ 不会有最小元；而集合 $\wp(3) \sim \{0,1,2\}$ 则无最大元.

定理　若序集 A 的最小(大)元存在，则最小(大)元必定是唯一的.

证明：我们只证明最小元的情况，而把最大元的情况留给读者作为练习.

设 a,b 都是集 A 的最小元，则有 $a \leqslant b$ 并且 $b \leqslant a$ 成立. 由序的反对称性，必有 $a = b$，即若序集 A 有最小元，则最小元必定是唯一的.

二、良序集

定义 设给定序集 A，当且仅当 A 的每个非空子集都有最小元，则称 A 是良序集.

良序集的定义是以序集为基础的，要求每个子集首先是序集的非空子集. 由序集所具有的传递性，因此每个非空子集本身也首先是序集，并且与原来的序集有相同的偏序.

良序集的定义是以最小元的存在为充分条件的，即序集的每个非空子集都含有最小元. 例如，序集$(\{a\},=)$，$(\omega,\leqslant)$都满足这样的充分条件，因此它们都是明显的良序集. 特别地，序集$(\varnothing,\varnothing)$也是良序集.

良序集所要求的最小元与数集中人们所习惯的最小元(数)是有差别的. 例如，以负整数为一集合，记为 Z^-，按照人们所习惯的数的大小概念和大小顺序来看，Z^- 不能是良序集，因为明显的是，子集 Z^- 本身就没有最小元. 但按照集合的序的观点来看，Z^- 可以是良序集，我们只需定义负整数绝对值大的反而“小”就可以了. 显然，“小”在这里与其说是量的比较，不如说更准确地是顺序位置的比较.

又如，以 Q^+ 记正有理数集合，按照正有理数集合原本的顺序，无论我们怎样地观察它也不能是良序集，并且，我们显然也无法按照 Z^- 的方式把 Q^+ 处理为良序集. 但由于我们已经证明 $Q^+\approx\omega$，这表明存在 $\omega\to Q^+$ 上的双射，那么，从理论上说，只需把 Q^+ 中的元素依据同 ω 中的元素从小到大地“配对”的这个方式重新排列后，所得的序集就是良序集. 对 ω 的笛卡尔乘积 $\omega\times\omega$ 的处理也是一样的. $\omega\times\omega$ 是指 ω 中一切元素的所有可能的配对组合，因此 $\omega\times\omega$ 本身也无所谓良序，但如前所述，只需令

$$f(m,n)=\frac{(m+n)(m+n+1)}{2}+m,$$

则这样的 f 必然是 $\omega\to\omega\times\omega$ 上的双射，由于 $(\omega,\leqslant)$ 是良序，故只需双射 f 对 $\omega\times\omega$ 的元素重新排列，所得的集合必定是良序集.

三、良序集的类

一个序集是否为良序集，最根本的依据是序集是否满足良序集的定义. 但在实践中可以从不同的角度进行观察和识别，我们把这些需要从不同角度进行观察而得出结论的良序集相应的分为不同的类.

一是直接利用定义作为识别标准的良序集. 如前面提到的 $(\varnothing,\varnothing)$，$(\{a\},=)$，它们都是以良序集的定义为标准可直接观察而得出结论的；

二是依赖于自然数集 ω 的良序集. $(\omega,\leqslant)$ 始终是良序集，这由良序集的定义是显然的. 在这一类观察中有一个不证自明的前提：同良序集等势的集合是良序集. 如前面提到的 $\omega\times\omega$，Z^-，Q^+，它们的良序是依赖于它们都与良序集 ω 等势；

三是依赖于集合的并运算所得到的良序集. 例如，序集

$$\{1-\frac{1}{n+1}\mid n\in\omega\}\cup\{1\},$$

按照有理数本身的顺序是良序集. 序集

$$\{1-\frac{1}{n+1}\mid n\in\omega\}\cup\{2-\frac{1}{n+1}\mid n\in\omega\},$$

按照有理数本身的顺序还是良序集. 更一般的，序集

$$\bigcup_{m\in\omega}\{m-\frac{1}{n+1}\mid n\in\omega\}$$

依然是良序集，这些良序集显然都同前两类良序集是不同类的. 而认为它们是良序集的理由并不复杂，即从有理数的序、良序集的定

义和数之间的大小关系这三个方面来看也就足够了.当然,这类良序集可以简单地归结为“良序集的并还是良序.”这一点我们在后面适当的时候再给出证明.

四是根据序集的偏序是否为全序的良序集.但它的考查对象是有限集,即任何带有全序的有限集必定是良序集.

观察某一序集是否是良序集的角度是非常多的,以上不过是一些常见的角度,因此所列的类型也不过是一些常见的类型.其他的观察角度,如对 $\omega\times\omega$ 而言,除了从与 ω 相一致的顺序可确定它为良序集外,我们用字典排列的方式也同样可以使之为一良序集.而所有上述不同的良序集能够提示我们的是:如果能够为一个集合的所有元素找到某个排列的方式,使之能成为一个全序集,并且使该全序集的任意非空子集都存在最小元,那么,它必定是良序集.

四、良序集的性质

定理　良序集必是全序集.

证明:设 A 是良序集,则对任意元素 $x,y\in A$,子集 $\{x,y\}$ 必有最小元;如果 x 是最小元,那么,$x\leqslant y$,如果 y 是最小元,那么,$y\leqslant x$.可见,$x\leqslant y$ 或者 $y\leqslant x$ 中至少有一个必定成立,即对任意元素 $x,y\in A$,x,y 总是可较的,所以,A 必是全序集.

在讨论良序集的另一性质之前,我们引入两个概念,即截段和前段.

截段的定义　设给定全序集 A,A 的子集 T 称为 A 的一个截段,当且仅当,对任意的元素 $x,y\in A$,都有 x 属于 T 并且 y 小于 x,那么,y 必定属于 T.即有充要条件

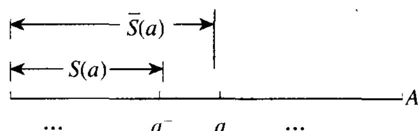
$$\forall x,y\in A(x\in T\wedge y<x\rightarrow y\in T)$$

成立时,$T\subseteq A$,T 就是 A 的一个截段.

截段的定义相当于说，A 的截段 T 是 A 的这样的一个子集：若在全序"$\leqslant$"的作用下，x 是 T 的元素，那么在 A 中凡排序排在 x 之前的 A 的所有元素都必须是 T 的元素．例如，设 $A=\{0,1,2,3\}$，那么，$\{0\}$，$\{0,1\}\{1,2\}$，$\{2,3\}$ 尽管都是 A 的子集，但在某个全序的作用下，只有 $\{0\}$，$\{0,1\}$ 是 A 的截段，而 $\{1,2\}$，$\{2,3\}$ 都不能成为 A 的截段．这表明，截段是特指全序集的某些特定的子集．

在全序集 A 的截段中，如果截段 $T\neq A$，则称 T 是 A 的一个真截段．集合 A 的真截段都是集 A 的真子集，但集 A 的真子集不一定就是 A 的真截段．如上述例子中的集合 $\{1,2\}$，$\{2,3\}$ 都是 A 的真子集，但它们根本就不是 A 集的截段，当然更不会是真截段．

前段的定义 设给定全序集 A，并给定 $a\in A$，称 $S(a)=\{x\in A\mid x<a\}$ 为 a 在 A 中的前段，或者为 A 中 a 的前段．并称 $\overline{S}(a)=\{x\in A\mid x\leqslant a\}$ 为 a 在 A 中的弱前段．如图：



显然，定义中的 $S(a)$，$\overline{S}(a)$ 都是全序集 A 的截段，并且，特别地 $S(a)$ 必定是 A 的真截段，因为对 $S(a)$ 来说，一定有 $a\in A\wedge a\notin S(a)$．而 $\overline{S}(a)$ 则有可能与 A 相等，只需 a 是全序集 A 的最大元即可．同时，对于全序集 A，若 T 是 A 的任一截段，则对任一 $x\in T$，$S(x)$ 都既是 A 的真截段又是 A 中 x 的一个前段．

在一般的全序集中，由上述定义可知，真截段是比前段更为广泛的概念，如在实数集合 $\mathbf{R}$ 中，任取 $\alpha\in\mathbf{R}$，那么 $S(\alpha)$，$\overline{S}(\alpha)$ 都应该是 R 的真截段，其中，固然可以说 $S(\alpha)$ 是 α 的前段，但 $\overline{S}(\alpha)$ 就不能是任何实数定义意下的前段．这是因为在实数集 $\mathbf{R}$ 中，在 α 的后面不存在（准确地说是存在但不能确定）"紧接着"的任何一个实数．α 的截段、前段都不管 α 后面紧接着的那个元素，但弱前段要转化

为前段，或者要成为真前段，都必须涉及紧接着 α 的那个元素．

定理　全序集 A 是良序集，当且仅当对于 A 的任何真截段 T，存在某个 $a \in A$，使得 $T = S(a)$.

即 A 若是良序集其充分必要条件是 A 的任何一个真截段，都是 A 的某个元素 a 的一个前段，或者就是 a 的弱前段．

证明：必要性．

设 A 是良序集，且 T 是 A 的一个真截段，则有

$$A \sim T \neq \varnothing.$$

因为 A 是良序集，所以，A 的任一非空子集都应该有最小元，从而 $A \sim T$ 也应该有最小元，不妨设为 a，以下证明，$T = S(a)$.

事实上，假定 $x \in T$，则 $x < a$，否则，按全序集所满足的三歧性，必然性有 $a \leqslant x$，而按截段的定义，又必然有 $a \in T$，这显然是与 $a \in A \sim T$ 相矛盾的，所以，有 $x \in S(a)$；

另一方面，因为 a 是 $A \sim T$ 的最小元，则对任意的 $x \in A$，都有若 $x < a$，则 $x \in S(a)$，这也表明 $x \notin A \sim T$，即 $x \in T$.

综上所述，$T = S(a)$，即必要性成立．

充分性．

设 A 是全序集，B 是 A 的任一确定的非空子集，T 是 B 在 A 中的一个严格下界元素所构成的集合，即有

$$T = \{y \in A \mid \forall x \in B(y < x)\},$$

显然，T 必然是 A 的一个真截段，由题设，必定存在 $a \in A$，使得 $T = S(a)$. 这是因为，对任意的 $x \in B$，一定有 $a \leqslant x$，否则，$x \in T = S(a)$，这与 T 是 A 中子集 B 的严格的下界集合即 $B \cap T = \varnothing$ 相矛盾．并且，a 必然是属于 B 的，否则，对任意的 $x \in B$，排除了 $a \leqslant x$ 中的等号，将有 $a < x$，从而使得 $a \in T = S(a)$，这又与前段的定义相矛盾．综上所述，a 必定是 B 的最小元．由 $B \subseteq A$ 的任意性，A 一定是良序集．

本定理所揭示的良序集的特征是，由于真截段必定是良序集

中某个元素的前段，所以，若把良序集的“顺序”看做是从左向右的一个排列，那么，在集合A中从左边第一个元素开始任意地截取一段，只要截取的不是A集的全部，那么，无论被截取的部分是否存在最大元，但A集合中必定存在某个元素，它一定是紧接在这个截段的后面的．

第三节　超限归纳原理

良序集概念可以说是自然数集合的最小数原理的一个推广应用．但是，在自然数集合的基础上归纳还有重要的第一归纳原理和第二归纳原理，那么，比自然数集合更一般的良序集还能保留、应用这些原理吗？

超限归纳原理

在前面我们曾讨论过的、建立在自然数集 ω 基础上的第一归纳原理是：设 $A \subseteq \omega$，并且满足

1. $0 \in A$；

2. $\forall n \in \omega(n \in A \to n^+ \in A)$，

则必然有 $A = \omega$.

因为 ω 集存在最小元 0，如果 $A = \omega$，那么 A 也应当有最小元 0，这样我们可以简单地把第一归纳原理改变为：

设 $A \subseteq \omega$，并且满足

1. ω 的最小元 $0 \in A$；

2. $\forall n \in \omega(n \in A \to n^+ \in A)$，

则必然有 $A = \omega$.

那么，这个作出相应改变的"归纳原理"对一般的良序集还是适用的吗？我们来看下面的例子．设集合

$$W = \{1 - \frac{1}{n+1} \mid n \in \omega\} \cup \{1\},$$

我们知道，W 以数的大小关系为偏序，是一良序集，其最小元为 0，最大元为 1. 现在设 W 的一子集

$$A = \{1 - \frac{1}{n+1} \mid n \in \omega\},$$

显然，当 $n=0$ 时，虽然 W 的最小元 0 是属于 A 的，但此时的 0 却并非是自然数的 0，因此，我们不能说 A 是满足条件 1 的；对条件 2 的证明几乎是不可能的，因为在自然数集中定义的 n 和 n 的后继从理论上说，对集合 W 与 A 都是不适合的．那么，假定我们从形式这一角度出发，把上述原理改变为：

设 $A\subseteq W$，并且满足

1. W 的最小元 $\in A$；

2. $\forall a\in W(a\in A\rightarrow$ 紧接着 a 的后一个元素 $\in A)$，

则必然有 $A=W$.

那么，下述理由表明这样的归纳原理对一般的良序集来说还是不恰当的．这是因为，第一，"紧接着 a 的后一个元素"对有的良序集是不可操作的，例如上面所列举的集合 W；其次，即使是满足条件 1 和条件 2，但这些条件可能并不能够足以将我们所需要的元素都予以归纳．如上例中 W 和 A 的关系，显然 W 的最小元 0，是属于 A 的，并且如果对任意的 $a=1-\dfrac{1}{n+1}\in W$，都有

$$1-\frac{1}{n+1}\in A\rightarrow 1-\frac{1}{n^{+}+1}\in A,$$

但并不能因此推出 $W=A$，因为明显的有 $1\in W$ 但 $1\notin A$. 所以，对第一归纳原理，无论我们如何改造，它都是不适合一般的良序集的．但关于自然数集的第二归纳原理则不同，因为第二归纳原理依赖的是自然数的最小数原理来建立的，而这一点恰好符合一般良序集的特点，因此，我们不妨在更一般的形式和意义上把第二归纳原理改造为适宜一般良序集的归纳原理，我们把这个改造后的第二归纳原理称为超限归纳原理.

定理 设 W 是良序集，对于任何的 $A\subseteq W$，如果 A 满足条件

$$\forall a\in W(S(a)\subset A\rightarrow a\in A),$$

则 $A=W$.

这个定理的证明同第二归纳原理的证明有完全类似的思路.

设 $A \neq W$，则 $W \sim A \neq \varnothing$，由于 W 是良序集，故 $W \sim A$ 必然有元素 w 为其最小元，于是由归纳假设有

$$S(w) \subset A \rightarrow w \in A,$$

这显然是和 $w \in W \sim A$ 相矛盾的，所以，$W = A$.

可以证明，若已知集合 W 是全序集，但 W 的任意满足条件 $S(w) \subset A \rightarrow w \in A$ 的子集 A 都一定与 W 重合，则 W 必定是一良序集. 这等于说，对全序集 W，W 是良序集当且仅当对任意的 $A \subseteq W$ 都有：若 A 满足条件

$$\forall w \in W(S(w) \subset A \rightarrow w \in A),$$

则 $A = W$.

第四节　序集的相似和良序集的比较

一、序集的相似

定义　设给定序集$(X, \leqslant_x)$，$(Y, \leqslant_y)$，当且仅当

1. 存在 $f: X \to Y$，使得 $X \approx Y$；
2. 对于任意的 $a, b \in X$，都有

$$a \leqslant_x b \leftrightarrow f(a) \leqslant_y f(b)$$

成立，则称序集 X 和 Y 相似，记为 $X \backsim Y$，并称 f 是由 X 到 Y 上的一个相似映射．

由定义所设的条件不难看出，序集的相似在条件上比集合之间和序集之间的等势更为严格．等势只需要在两集合之间能够找到一个双射即可，它反映的是两个集合的元素可以配对“同样多”．相似则不然，它不仅需在两集合之间有确定的双射存在，并且要求这样的双射在值域中保持相应元素之间的可较性质．例如，令

$$X = \omega,$$

$$Y = \{1 - \frac{1}{n+1} \mid n \in \omega\},$$

在 ω 中，以“$<$”关系为偏序，而在 Y 中以“$>$”关系为偏序，即有 $\leqslant_x$，$=$，$<$ 并且 $\leqslant_y$，$=$，$>$．现在 X 和 Y 之间定义 $f = 1 - \frac{1}{n+1}$，那么，容易证明，f 是上述 X 到 Y 上的一个双射，有

$$X \approx Y;$$

另一方面，对任意的 $m, n \in X$ 都有，如果 $m < n$，那么

$$1-\frac{1}{m+1}>1-\frac{1}{n+1},$$

显然，f 不但是双射，并且在 f 的值域中始终保持有相应元素的可较性，所以，$X \backsim Y$，即

$$\omega \backsim \{1-\frac{1}{n+1} \mid n \in \omega\}.$$

又如实数集 $\mathbf{R}$ 和其真子集 $(0,1)$，我们以人们所习惯的"$>$"关系分别为它们的偏序，在 $\mathbf{R}$ 和 $(0,1)$ 之间定义 F 为

$$F(x)=\operatorname{arccot} x,$$

则不难验证，F 是从 $\mathbf{R}$ 到 $(0,1)$ 上的一个双射，由于当 $x \to +\infty$ 时，$\operatorname{arccot} x \to 0$，$\operatorname{arccot} x \to 1$，故对任意的 $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$，都有 $\alpha>\beta$ 时，$\operatorname{arccot}\alpha<\operatorname{arccot}\beta$，即 F 不但是双射，并且在 F 的值域中始终保持有相应元素的可较性，所以，

$$\mathbf{R} \backsim (0,1).$$

而对于集合 $X=\{1-\frac{1}{n+1} \mid n \in \omega\}$ 和 $Y=\{1-\frac{1}{n+1} \mid n \in \omega\} \cup \{1\}$ 来说，X 与 Y 不能相似，因为在两者之间，不存在双射，使得 $X \approx Y$.

定理 对于任意的序集 X, Y, Z，都有

1. 自返性成立，即有 $X \backsim X$；
2. 对称性成立，即若有 $X \backsim Y$，则 $Y \backsim X$；
3. 传递性成立，即若有 $X \backsim Y$ 并且 $Y \backsim Z$，则 $X \backsim Z$.

定理的成立是显然的，证明从略.

由于在全序集中，"$<$"关系具有完全的三歧性，故使全序集(特别是良序集) X 与 Y 相似的充分必要条件可以表述为：

(1) 存在从 X 到 Y 的满射 f；

(2) f 是严格递增的，即对任意的元素 $a, b \in X$，都有

$$a<b \to f(a)<f(b).$$

二、良序集的可较原理

定理　设 X 是良序集，f 是 X 到其某一子集 A 上的一个相似映射，则对于任何的 $a \in X, a \leqslant f(a)$.

证明：我们利用超限归纳原理来证明这一定理．设条件中的子集

$$A = \{x \in X \mid x \leqslant f(x)\},$$

那么，对于任意的 $a \in X$，如果 $S(a) \subseteq A$，那么，只需要能够证明 $a \in A$ 就可以了．这也等于说，如果设对于一切 $x < a$，都有 $x \leqslant f(x)$，那么，只需要能够证明 $a \leqslant f(a)$ 就足够了．我们下面用反证法来说明这一点：

假设 $a \leqslant f(a)$ 在给定的条件下不成立，那么，由于 f 是从 X 到 X 的子集 A 上的映射，因此 $a, f(a)$ 都是属于 X 集的．X 是良序集，由良序集在"$<$"关系上严格的三歧性，必定有 $f(a) < a$ 成立．在归纳假设中，不妨令 $x = f(x)$，则有 $f(a) \leqslant f(f(a))$ 成立．

然而，另一方面，由良序集都是全序集，所以，从 X 到其子集 A(A 与 X 此时具有相同的序)上的相似映射 f 必须是严格递增的(定义)，故由 $f(a) < a$ 又必须有 $f(f(a)) < f(a)$ 也成立，由假设，即 $f(x) < x$ 成立，这显然与归纳假设矛盾．所以，只能有 $a \leqslant f(a)$ 成立，即 $a \in A$.

由超限归纳原理，即 $A = X$.

本定理的直观意义在于，首先，对于任意的一个良序集，若存在由该集到其某个子集的相似映射，那么，我们一定能证明这个良序集与该子集是同一个集合；其次，是一个良序集如果存在到其某个子集的相似映射，那么，这个相似映射不能是"后退的"或者是递减的，相似映射的定义表明了这一点，而上述定理的证明又证明了这一点：只要否认其递增性，就会导致逻辑矛盾．而一般的全序

集则可能并不具备这样的性质. 例如,设 $F:\mathbf{R}\to(0,1)$,令 $f(x)=\operatorname{arccot}x$,由计算可知,对任意的 $x\in\mathbf{R}$,都有 $F(x)\leqslant x$,即 $F(x)$ 不是递增的,所以 F 不能是由 $\mathbf{R}$ 到 $(0,1)$ 上的相似映射. 而对于映射 $F:\omega\to\omega_e$,定义 $F(n)=2n$,由于任意的 $n\in\omega$ 都有 $n\leqslant 2n$,所以 F 是相似映射显然.

定理 任何良序集不能与其真截段相似.

证明:设 X 是良序集,假设 X 与其某一真截 T 段相似,则存在从 X 到 T 上的相似映射 f. 由于 X 是良序集,T 是 X 的真截段,故 T 必然是某个 $a\in X$ 的前段,即有 $T=S(a)$. 于是由 $f(a)\in T=S(a)$ 推之,一方面有 $f(a)<a$(定理的条件),而另一方面又有 $a\leqslant f(a)$(上述已证定理),这显然是一个矛盾,因此,这样的相似映射 f 不可能存在,所以,良序集 X 也不可能与其任意的真截段相似.

定理 设给定良序集 X 和 Y,若存在从 X 到 Y 上的相似映射 f,则 f 必定是唯一的.

证明:设 f,g 都是从 X 到 Y 上的相似映射,则 $(g^{-1}\cdot f)$ 必定是从 X 到 X 上的相似映射,由上述已证定理,对任意的 $a\in X$,一定有

$$a\leqslant(g^{-1}\cdot f)(a)$$

成立. 由相似映射或函数复合的性质,在上述公式的两边同时使用相似映射 g,则有

$$g(a)\leqslant f(a)$$

成立. 同样的道理,映射 $f^{-1}\cdot g$ 必定也是从 X 到 X 上的相似映射,因此也有

$$a\leqslant(f^{-1}\cdot g)(a),$$

则有

$$f(a)\leqslant g(a),$$

比较上面的结果,所以有

$$f(a) = g(a),$$

即，相似映射对良序集 X 和 Y 来说，只能是唯一的.

良序集的可较原理 对于任意给定的两个良序集 X 和 Y，以下三种情形中恰好有一种成立：

1. $X \backsim Y$；

2. $X \backsim Y$ 的某一真截段；

3. X 的某一真截段 $\backsim Y$.

由上述已证定理，不难说明可较原理的三种情况是两两不相容的，因此，我们只需要证明在上述三种情况中至少有一种成立就可以了. 如果 X 和 Y 中有一个为空集，那么结论的成立是显然的. 下面设 X，Y 都不是空集，并假定 X 和 Y 的每一个都不与另一个的真截段相似，那么，只需要我们能证明 X 和 Y 相似就可以了.（证明略，有需要了解者可参考北京师范大学出版社董延闿的《基础集合论》第 151 页）

第五节　良序化原理

对于任意一个集合，无论它是否带有偏序，良序化原理所提供的保证是，我们总能找到某种方式，从而赋予它一个良序．为了一般地说明这个原理，我们先做一些必要的观察．

任意给定集合 A，如果 A 是空集 $\varnothing$，那么由定义，偏序 $\varnothing$ 就是我们所给出的一个良序，它使得空集成为良序集．以下为说明一般性，不妨设 $A \neq \varnothing$，并且设 A 为一无穷集．在上述给定条件下，A 是否能够良序化虽然还没有证明，但从良序的定义来看，A 有良序化的子集则是无疑的．例如，对任意的 $a \in A$，可构造序集（$\{a\}$，$=$），由前面的讨论，我们知道（$\{a\}$，$=$）就是一个良序集，而显然 $\{a\} \subseteq A$.

现在，我们以 D 表示 A 的任一良序化的子集，记为$(D, \leqslant_D)$，其中，$D \subseteq A$，而"$\leqslant_D$"是 D 的良序．由于 D 只是 A 的子集，因此没有理由否认这些子集之间的相容性；但现在的问题是，假如使得 A 的各子集良序化的偏序 $\leqslant_D$ 是互不相同或者基本上是互不相同，那么，我们对 A 的良序化讨论也就没有什么好说的了，因为我们在这样的条件下对 A 的良序化根本就做不出什么事情来．我们首先需要做的是，把 A 的各个良序化子集的良序 $\leqslant_D$ 先统一起来．下面，我们就利用已介绍的选择公理来完成这一工作．

设 φ 是 A 的一个选择函数，规定：对于 A 的每个良序化子集$(D, \leqslant_D)$，都有

$$\forall a \in D(\varphi(A \sim S_D(a)) = a);$$

其中，$S_D(a)$ 可以看成是在集合 D 中元素 a 的前段．之所以可以看成是 a 的前段，是因为尽管 A 是任意集合，但子集 D 在偏序 $\leqslant_D$ 作

用下成为良序集，当然它必定是全序集，因此 $S_D(a)$ 满足前段的定义．按照上述选择函数的规定，设 a_i 为 D 中按确定的良序排在第 $i+1$ 位上的元素，D 中的第一个元素若为 a_0，则 $a_0=\varphi(A)$，因为此时在 D 中 a_0 的前段为空集 $\varnothing$；而 $a_1=\varphi(A\sim\{a_0\})$，$a_2=\varphi(A\sim\{a_0,a_1\})$，$a_3=\varphi(A\sim\{a_0,a_1,a_2\})$ 等．那么，$(\{a_0\},=)$ 就是第一个我们需要的良序化子集．并且，如果良序化子集 $(\{a_0,a_1\},\leqslant_1)$ 也符合选择公式的规定，那么，$(\{a_0,a_1\},\leqslant_1)$ 就是第二个良序化子集，其中，a_0 为其最小元，有 $a_0\leqslant_1 a_1$．如果良序化子集 $(\{a_0,a_1,a_2\},\leqslant_2)$ 同样符合选择公式的规定，那么，$(\{a_0,a_1,a_2\},\leqslant_2)$ 就是第三个良序化子集，其中，a_0 还是为其最小元，由良序所具有的传递性，有 $a_0\leqslant_2 a_1\leqslant_2 a_2$．如此等等，我们可以一般地得到 D 的良序化子集

$$(\{a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n\},\leqslant_n),$$

从而有

$$a_0\leqslant_n a_1\leqslant_n a_2\leqslant_n\cdots\leqslant_n a_n.$$

从这些具体的良序化子集可以看出，它们的元素最终确实能够找到并保持有统一的某个良序．由于这些子集的后一个总是包容着前一个从而前面的所有子集，因此，把这样的情况设法概括为一般，那么可以期望，求一切符合选择公式规定的子集的并集，就可能得到被完全良序化了的集合 A. 下面定理的证明，就是沿着这样的思路来展开的．

定理　每个集合都可以良序化．或者说，对于任意的集合 A，必定存在着它的某个偏序 $\leqslant$，使得 $(A,\leqslant)$ 成为良序集．

证明：如前分析，可设集合 $A\neq\varnothing$，并按照选择公理，设 $\varnothing$ 是 A 的一个选择函数．为了以下证明中叙述的方便，我们约定，当且仅当 $D\subseteq A$ 并满足条件

1. 存在 D 的偏序 $\leqslant_D$，使得 $(D,\leqslant_D)$ 是良序；

2. 对于任意的 $a\in D$，$\varphi(A\sim S_D(a))=a$，

则称良序集$(D, \leqslant_D)$是一个$\Gamma-$集，并用Γ记这样的一切$D \subseteq A$. 下面，我们分几步来证明本定理.

首先，对于任一个给定的$D \subseteq A$，若存在两个良序$\leqslant_{D_1}$和$\leqslant_{D_2}$，使得$(D, \leqslant_{D_1})$和$(D, \leqslant_{D_2})$都是$\Gamma-$集，则$\leqslant_{D_1}$和$\leqslant_{D_2}$必定是相同的. 我们只需要在任意给定的集合D中，任取元素a，使得$S_{D1}(a) = S_{D2}(a)$就可以了. 利用超限归纳原理，对于给定的D和a在D中任取元素$x < a$，设$S_{D1}(x) = S_{D2}(x)$，那么，集合$S_{D1}(a)$在良序集$(D, \leqslant_{D2})$中还是一个截段. 这是因为，设$x \in S_{D1}(a)$且任意的$y \in S_{D2}(x)$，此即在$(D, \leqslant_{D1})$中，$x < a$，并且在$(D, \leqslant_{D2})$中，$y < x$. 由归纳假设，必然有$y < x$，从而$y < D$中同一个给定的a，即$y \in S_{D1}(a)$. 可见，集合$S_{D1}(a)$在良序集$(D, \leqslant_{D2})$中依然只是一个截段，由于$a \notin S_{D1}(a)$，因此，$S_{D1}(a)$是$(D, \leqslant_{D2})$的一个真截段. 现在设在$(D, \leqslant_{D2})$中它是a'的前段，则有

$$S_{D1}(a) = S_{D2}(a');$$

由$\Gamma-$集的定义条件，有

$$\begin{aligned} a &= \varphi(A \sim S_{D1}(a)) \\ &= \varphi(A \sim S_{D2}(a') \\ &= a', \end{aligned}$$

于是，对于任意给定的D和a，我们能够归纳得到

$$S_{D1}(a) = S_{D2}(a),$$

即在给定的条件下，$\leqslant_{D1}$和$\leqslant_{D2}$必定是相同的.

其次，我们证明，如果$(D, \leqslant_D)$和$(E, \leqslant_E)$都是$\Gamma-$集，那么，或者D是$(E, \leqslant_E)$的截段，或者E是$(D, \leqslant_D)$的截段，并且，两者在元素的共同部分良序的顺序保持一致性.

在没有说明集合D,E的相同部分在良序顺序上具有一致性之前，要断言上述证明中的另一个结论是困难的. 下面，我们换一个角度来考虑问题. 设$\sum$是满足下述条件的集合F的全体：

1. $F \subseteq D \cap E$;

2. F 同时是良序集$(D, \leqslant_D)$和$(E, \leqslant_E)$的截段.

另设$G = \bigcup(\sum)$. 那么,不难验证,集合G依然满足上述条件1和条件2,或者说,此时的G就是满足上述条件的最大的F. 下面,我们证明G不能同时是$(D, \leqslant_D)$和$(E, \leqslant_E)$的真截段.

这是因为,如果G同时是二者的真截段,那么必定存在$d \in D$并且有$e \in E$,使得$G = S_D(d) = S_E(e)$. 又因$(D, \leqslant_D)$和$(E, \leqslant_E)$都是Γ－集,所以有

$$\varphi(A \sim G) = d = e,$$

这表明,$d = e \in D \cap E$. 现在设$G' = G \cup \{d\}$,由弱前段定义,$G' = \overline{S}_D(d) = \overline{S}_E(e)$,可见,$G'$依然满足上述条件1和条件2,因此,除非$G' = G$,否则这就同$G$是满足上述条件的最大的$F$的假设矛盾. 现在,$G$既同时是$(D, \leqslant_D)$和$(E, \leqslant_E)$的截段,但又不能同时是二者的真截段,所以,$G$只能与$D$,$E$中的某个集合重合. 不妨设$G = E$,于是由上述证明,$E$是$(D, \leqslant_D)$的截段. 现在,一方面$(E, \leqslant_E)$是$\Gamma$－集,另一方面,它又是$\Gamma$－集$(D, \leqslant_D)$的截段,因此,$(E, \leqslant_D)$也是$\Gamma$－集. 所以,按上述首先证明的结果,在$E$中$\leqslant_D$和$\leqslant_E$是相同的.

再次,我们来确定所需要的偏序$\leqslant$. 设$U = \bigcup(\Gamma)$,并如下定义整个U的偏序:根据上述其次的证明,对于任意的两个属于U都必须同时属于某个$D \in \Gamma$的x和y,那么,我们就用这个D的偏序$\leqslant_D$来确定$x \leqslant y$或者$y \leqslant x$,而并不刻意于特定的D的选择. 事实上,设x, y同属于$D \in \Gamma$且同属于$E \in \Gamma$,那么按其次所证,或者E是$(D, \leqslant_D)$的截段,或者D是$(E, \leqslant_E)$的截段,并且在x, y所属的共同部分保持有顺序上的一致性,即有

$$x \leqslant_D y \leftrightarrow x \geqslant_E y.$$

那么,在赋予了U以上定义的偏序$\leqslant$的基础上,我们容易证明,对于任意的一个$D \in \Gamma$,都应该是序集$(U, \leqslant)$的一个截段. 这是因

为，假设 $a \in D$ 且 $x < a$，那么，如果 x 属于某个 $E \in \Gamma$，那么，或者 E 是 $(D, \leqslant_D)$ 的截段，这时当然有 $x \in D$；或者此时 D 是 $(E, \leqslant_E)$ 的截段，此时由 $a \in D$ 并且 $(x < a \leftrightarrow x <_E a)$，同样可推出 $x \in D$.

另外，我们证明 $(U, \leqslant)$ 是 $\Gamma-$ 集.

首先，U 是良序集. 这是因为，若设集合 $B \subseteq U$，并为不失一般性，令 $B \neq \varnothing$. 那么，任取 $b \in B$，看非空集合 $C = \{x \in B \mid x \leqslant b\}$，因为 U 是一切 $D \in \Gamma$ 的并集，所以 b 必定属于某个 $D \in \Gamma$. 由上述再次的证明，D 是 U 的一个截段，故由截段的定义，任何 $x \leqslant b$ 都会属于 D，所以必然有 $C \subseteq D$. 既然 C 是良序集 D 的非空子集，所以 C 一定有最小元，由 C 的构造，这个最小元必定也是 B 的最小元. 这就足以证明 U 是良序集.

其次，我们证明 U 满足 $\Gamma-$ 集的第二个条件. 任设 $a \in U$，则 a 必定属于某个 $D \in \Gamma$. 因为 D 是 U 的截段，所以有

$$S(a) = S_D(a).$$

但 D 是满足 $\Gamma-$ 集的第二个条件的，所以，

$$\varphi(A \sim S(a)) = \varphi(A \sim S_D(a)) = a.$$

综上所述，$(U, \leqslant)$ 是 $\Gamma-$ 集.

最后，我们证明：$U = A$.

事实上，如果 $U \neq A$，那么 $A \sim U \neq \varnothing$. 设

$$U' = U \cup \{\varphi(A \sim U)\},$$

并且这样规定 U' 的偏序：(1) 在 $U \subseteq U'$ 中，保持 U 原来的顺序；(2) 取 $\varphi(A \sim U)$ 为 U' 的最大元. 由 U' 的构造和 $\Gamma-$ 集的定义，不难验证，带有这样偏序的 U' 依然是 $\Gamma-$ 集，这就同 U 是给定条件下最大的 $\Gamma-$ 集矛盾，所以，必然有 $U = A$.

综上所述，$(A, \leqslant) = (U, \leqslant)$ 是良序集，定理成立.

集合理论的创始人康托尔最先提出了良序化原理，他把它称为一个极为重要的逻辑律. 但康托尔在其有生之年并没有能够对这一重要的定理作出证明. 完成这一定理的证明的是集合公理论

的带头人策梅罗．1904 年，策梅罗第一次利用选择公理证明了良序化原理，其大致过程如上述的证明过程．选择公理的应用在证明中起着十分关键的作用．可以说，正是由于承认了 A 的选择函数 φ 的存在，我们才能利用它在 $\Gamma-$ 集的定义第二个条件中使得一切 $\Gamma-$ 集的良序得以统一，才能最终地去确定 $U=A$ 的良序．所以，只要我们承认选择公理，那么，我们就得依据它去证明成立的良序化原理．

良序化原理仅是从理论上肯定了一切集合的可良序化．但对不同的集合，其具体的良序化过程却可能是非常复杂的，如实数集 $\mathbf{R}$，按其本来的顺序，$\mathbf{R}$ 是全序集而非良序集．良序化原理既然肯定任意集合都是能够良序化的，$\mathbf{R}$ 当然也能良序化．但事实上，至今没有任何人能够给出 $\mathbf{R}$ 的一个具体良序的明显的定义实例，而更不必说那些比 $\mathbf{R}$ 更大的集合了，如集合 $\wp(\mathbf{R})$，$\wp(\wp(\mathbf{R}))$ 等．

尽管良序化原理是这样的抽象和难以操作，但它的确同选择公理一样，是当代不少数学分支中一些重要内容的理论依据．就集合论来说也是这样．如我们在前面介绍集合之间的可较问题时，曾提出了这样一个问题：任意的两个集合是否一定可较？当时我们从理论上说的确是无法回答这一问题的．但现在依据良序化原理，这样的问题是完全可以解决的了．

定理　对于任意的两个集合 A,B，以下三种情形中恰好有一种成立：

(1)$A \approx B$；

(2)$A \prec B$；

(3)$B \prec A$.

证明：由等势和严格受制的定义，(1) 和(2)，(1) 和(3) 的分别不相容是明显的．并且，(2) 和(3) 也是不相容的，这是因为，如果这两者是相容的，那么就有

$$(A \prec B) \wedge (B \prec A)$$
$$\to (A \lhd B) \wedge (B \lhd A) \wedge \sim (A \approx B)$$
$$\to (A \approx B) \wedge \sim (A \approx B);$$

即,只要肯定(2)和(3)相容,就必定产生逻辑矛盾:A 等势于 B 并且并非 A 等势于 B. 因此,(2)和(3)也不相容.

其次我们证明(1)(2)和(3)中至少有一种情况是成立的. 由良序化原理,可以分别赋予任意集合 A,B 以良序. 再由已证的良序集的可较性定理,以下三种情况中至少有一种能成立:

(1) 良序集 A 与良序集 B 若相似,则有 $A \approx B$;

(2) 良序集 A 与良序集 B 的某一真截段若相似,则有 $A \lhd B$;

(3) 良序集 A 的某一真截段与良序集 B 若相似,则有 $B \lhd A$.

在(2)和(3)中略去相同的部分,即可知定理中的(1),(2)和(3)中至少有一个成立. 而综上全部证明,可知定理中的(1),(2)和(3)中恰好有一个成立.

第六节　Zorn 引理

在本章开始的时候，我们最初考虑的是一般的序集．而从第二节开始，我们就把重点放在了良序集的讨论上，并由此得出了一些重要的结果．现在，我们仍回到一般的序集．首先，我们来推广序集的最大元概念．

一、极大元和极小元

设 A 是一个序集且 $a \in A$，我们称 a 是 A 的一个极大元，一般是指在 A 中不存在大于 a 的元素，即对于任意的 $x \in A$，都有

$$x \not> a.$$

如前所述，在集合 $\wp(3) \sim \{0,1,2\}$ 中，不存在最大元，但 $\{0,1\}$，$\{0,2\}$，$\{1,2\}$ 都是上述所描述的 $\wp(3) \sim \{0,1,2\}$ 的极大元．

最大元和极大元这两个概念既相联系又相区别．首先，从数量上说，一个序集若存在最大元，那么，最大元只能是唯一的；但从上例来看，极大元却可以有多个．其次，从偏序的半三歧性和对极大元的描述来看，一个序集的最大元必定同时是极大元，但极大元却不一定是其最大元．当然，对于全序集来说，按全序集所具有的完全三歧性，不但其最大元是极大元，反之也正确．这是因为对于任意全序集 A 来说，条件 $\forall x \in A(x \leqslant a)$ 和条件 $\forall x \in A(x \not> a)$ 是等价的．一般的序集则不同，半三歧性肯定的是，$x \not> a$ 包括有 $x \leqslant a$ 和 x，a 根本就不可较这两种可能，因此极大元完全可能不是序集的最大元．

为了给出极大元的准确定义，并且方便这个定义在讨论中的

运用，我们不妨先分析比较一下 a 的条件

$$\forall x \in A(x \not> a) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

和条件

$$\forall x \in A(x \geqslant a \rightarrow x = a), \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

如果条件 ① 成立，并再设 $x \geqslant a$，那么在此假设和条件 ① 的共同作用下，必然有 $x = a$ 成立，因此条件 ② 也成立．反之，如果先假定条件 ② 成立，那么条件 ① 也应当成立．这是因为，如果条件 ① 不成立，即是

$$\exists x \in A(x > a),$$

但是，条件 ② 已假定成立，故由

$$\begin{aligned} x > a &\rightarrow x \geqslant a \\ &\rightarrow x = a, \end{aligned}$$

这明显地与偏序的半三歧性矛盾，所以，当条件 ② 成立时，条件 ① 不可能不成立．

由上述的分析比较，关于 $a \in A$ 的条件 ① 和 ② 显然是一对等价的条件，既然如此，我们不妨以条件 ② 来定义极大元的概念．

定义　设给定序集 A，当且仅当存在 $a \in A$，使得对于任意的 $x \in A$，都有

$$x \geqslant a \rightarrow x = a,$$

则称 a 是 A 的一个极大元．

类似地，我们可以把最小元的概念扩充为极小元．

定义　设给定序集 A，当且仅当存在 $a \in A$，使得对于任意的 $x \in A$，都有

$$x \leqslant a \rightarrow x = a,$$

则称 a 是 A 的一个极小元．

二、链

我们知道，一个序集不一定是全序集．但是，任何序集都一定

存在全序的子集．例如，作为任一序集子集的空集不但是全序的，而且还是良序集；而任何非空序集的单元素子集肯定都是该集的良序集，当然也都是全序集．下面，我们以序集的这些存在的全序子集为基础，来建立链的概念．

定义　一个序集的任一个全序子集，称为以序集的偏序为全序的序集的一个链．

例如，以包容序为集合$\wp(3)$的偏序，则其子集 $\varnothing$，$\{\varnothing\}$，$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$，$\{\varnothing,\{0\},\{0,1\}\}$ 等分别都是以包容序为全序序集$\wp(3)$的链．

包容关系是集合之间的一种非常重要的关系．Zorn 引理就是建立在包容序的基础之上的．我们知道，若M是一个集组，则$(M,\subseteq)$就是一个序集，但不一定就是一个全序集．现在设C是M的一个链，那么由链的定义，对于C中的任意两个集合A，B来说，不是$A\subseteq B$，就是$B\subseteq A$．现在，我们对链C求并，由并的定义，此时也许并集$\bigcup(C)$还是集组M的成员，也许$\bigcup(C)$不再属于M．例如，我们知道，每个自然数都是有小于它的自然数构成的集合，即对任意的$n\in\omega$，都有

$$n=\{i\in\omega\mid i<n\},$$

这样，我们不妨把ω看做是一个集组．ω本来的良序"$\leqslant$"我们在自然数一章曾作过讨论，它同包容序"$\subseteq$"具有完全相同的一致性．但作为包容序集，ω是它自己的一个链，而$\bigcup(\omega)=\omega$，显然有$\bigcup(\omega)\notin\omega$．又如以包容序为偏序的集合$\omega^+$，$\wp(3)\sim\{\{0,1,2\}\}$等，由于$\bigcup(\omega^+)=\bigcup(\omega\cup\{\omega\})=\omega$，可见，对$\omega^+$的任何链求并，其结果都将是$\omega^+$的成员；而对于$\wp(3)\sim\{\{0,1,2\}\}$的任何链求并，简单的运算也能够表明，其结果不可能不属于$\wp(3)\sim\{\{0,1,2\}\}$，所以，它们都属于并集$\bigcup(C)$，还是集组M的成员的一类．

定义　设给定包容序集$(M,\subseteq)$，其中，M为集组．当且仅当对于M的任意链C，$\bigcup(C)$都是M的成员，则称集组M关于链的

并封闭．

例如，上述实例分析中的集组 ω^+，$\wp(3)\sim\{\{0,1,2\}\}$ 以包容序为偏序，其链的并都是封闭的；而集组 ω 在同样的偏序下其链的并却不是封闭的．

利用上述定义，我们以下给出 Zorn 引理．

三、Zorn 引理

Zorn 引理 设给定包容序集 $(M,\subseteq)$，其中，M 是非空集组．若 M 关于链的并封闭，则 M 有极大元．

Zorn 引理的证明需要引入超限递推原理，所以引理的证明略，有兴趣的读者可参阅《基础集合论》(董延闿编著．北京师范大学出版社，1988 年版）有关章节．以下仅通过实例对定理做一点直观的分析．

设带有包容序的集组

$$M=\wp(3)\sim\{\{0,1,2\}\}$$
$$=\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\}\}$$

由于所设 M 的简单性，故容易写出它的全部元素．我们依次把 M 的元素记为 a,b,c,d,e,f 和 g．其中 e,f,g 是 M 的三个极大元．现在的问题是，我们能否求得一个带有一般性的方法，把 M 的这三个极大元中的某一个确定地找出来？事实上，我们可以抽象地赋予 M 的全部成员一个良序，所谓抽象地赋予，只是要求排在首位的一定是所有成员在这个良序中的最小元．以“$<$”记这个良序，则有

$$a<b<c<d<e<f<g.$$

这个抽象的良序虽然说与原本的包容序互不相关，但可以用下面的方法把二者统一起来：从按良序“$<$”的最小元 a 开始，顺次按这良序往后看，b 包容 a，于是把 b 留下来；c 虽然包容 a，但并不包容已留下的 b，于是把 c 去掉；d 虽然包容 a，但同样不包容留下的 b，

于是把 d 去掉；e 既包容 a，又包容留下的 b，于是把 e 留下；f 虽然包容 a 和 b，但不包容留下的 e，于是把 f 去掉；g 显然不包容已留下的 b，所以把 g 也去掉．这样，我们沿着所给定的良序"$<$"，得到集组 M 的一个链 $C=\{a,b,e\}$，其中，$a\subseteq b\subseteq e$，满足 $\bigcup(C)=e$，并且，M 中不再有包容 e 的其他成员．可见 e 就是集组 M 按包容序"$\subseteq$"的一个极大元．

当然，以上对极大元的找法，依赖的是有限的序集，并且计算的过程都可以是具体的．但如果 M 是一般的集组，那么，我们就既不能在有限步骤内又不能通过具体的计算去获得集组的某个极大元．然而，如果集组 M 能够关于链的并封闭，那么，如果我们能赋予 M 一个良序"$\leqslant$"(这当然是由良序化原理能够保证的)，那么我们仍可以按照上述原则，即把 M 的成员要么留下，要么去掉，从而得到 M 的一个链 C. 设 $U=\bigcup(C)$，由于 M 关于链的并封闭，所以一定有 $U\in M$. 可以期望，在 M 中不再有包容 U 而不等于 U 的成员，这样由极大元的定义，我们就可以断定 U 就是 $(M,\subseteq)$ 的一个极大元．

在上述的实例分析中，毫无疑问的是，选择公理和良序化原理都起着至关重要的作用．正是因为选择公理的承认，我们才能证明良序化公理的成立；正是因为良序公理的成立，才能让我们对任意的非空集合引入良序"$\leqslant$"，并利用超限递推原理去建立起留下或抛弃的原则，使我们得到包容序"$\subseteq$"与良序"$\leqslant$"一致的链 C，最终得到极大元 $U=\bigcup(C)$.

四、界

定义　设 A 是序集 X 的子集，当且仅当存在 $b\in X$，使得对于任意的 $x\in A$，都有 $x\leqslant b$(或者 $x\geqslant b$)，则称 b 是 A 在 X 中的一个上界(或者下界).

上(下)界的概念同极大(小)元的概念既互相联系又互相区别．从联系上看，同极大(小)元一样，一个集合的上(下)界都必须要同该集合的一切元素可较，并且，上(下)界同极大(小)元一样，可以不是唯一的．从区别方面来说，一个集合的上(下)界可以不属于该集合，但一个集合的极大(小)元却必须是该集合的元素．

上(下)界的概念同最大(小)元的概念也既互相联系又互相区别．从联系上看，同最大(小)元一样，一个集合的上(下)界都必须要同该集合的一切元素可较，并且，如果一个集合的上(下)界就属于该集合，那么，它一定就是该集合的最大(小)元，反之也成立．但两者之间的区别也是明显的：任何集合的最大(小)元都是唯一的，但上(下)界却可以有多个；任何集合的最大(小)元都必然是该集合的元素，但集合的上(下)界却不必然；一个序集的子集，必然存在上(下)界，但并不一定有最大(小)元．例如，在任何非空序集 X 中，空集 $\varnothing$ 以 X 的任意元素为其上界和下界，这是因为，$\varnothing \subseteq X$，并且，对任意的 $b \in X$ 与任意的 $x \in \varnothing$，$x \in \varnothing$ 都是假的，因此条件

$$x \in \varnothing \rightarrow x \geqslant b$$

和

$$x \in \varnothing \rightarrow x \leqslant b$$

都是真的．又如，在序集$(\wp(3), \subseteq)$中，任何子集都以$\{0,1,2\}$为上界，而以 $\varnothing$ 为下界．而在包容序集$\wp(3) \sim \{0,1,2\}$中，子集$\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{2\}\}$有下界 $\varnothing$，但没有上界．在自然数集 ω 中，子集偶数集和奇数集都是有下界但无上界．

定义　设 X 是一序集，当且仅当 $A \subseteq X$ 的所有上(下)界所构成的集合有最小(大)元 α 时，称 α 是子集 A 的上(下)确界或最小上(下)界，分别记为：

$$\alpha = \sup(A) \quad (\text{或 } \alpha = \inf(A)),$$

或者

$$\alpha = \text{lub}(A) \quad (\text{或}\ \alpha = \text{glb}(A)).$$

例如，设M是一集合．考虑M的所有子集组成的包容序集$(\wp(M), \subseteq)$．设集合$A, B \in \wp(M)$，若对任意的集合$C, D \in \wp(M)$，都有$A \subseteq C, B \subseteq D$，那么，集合$\{A, B\}$以$C \cup D$为它的一个上界．因为对任意的$x \in \{A, B\}$，都有$x \subseteq C \cup D$；并且，集合$\{A, B\}$以$A \cup B$为其上确界．若对任意的集合$C, D \in \wp(M)$，都有$C \subseteq A$，$D \subseteq B$，那么，集合$\{A, B\}$以$C \cap D$为它的一个下界．因为对任意的$x \in \{A, B\}$，都有$C \cap D \subseteq x$；并且，集合$\{A, B\}$以$A \cap B$为其下确界．

五、Zorn 引理的等价命题

定理　设给定非空序集X，如果X的每个链在X中有上界，则X有极大元．

证明：以Z_n记 Zorn 引理，而用Z_m记上述欲证的命题．

首先，在Z_n中，对于包容序集$(M, \subseteq)$中的每个链C，并集$\bigcup(C)$都是C的一个极大元，因此也都是C的一个上界，而M是有极大元的．这表明，Z_n是Z_m的一种特殊情况．

其次，我们以Z_n的成立来推出Z_m的成立．

由题意，设$(X, \leqslant)$是非空序集，并设$(X, \leqslant)$的每个链在X中都有上界．用M记$(X, \leqslant)$中所有的链构成的集合．由链的定义，$\varnothing \in M$，所以$(M, \subseteq)$是非空包容序集．现在设C是$(M, \subseteq)$的一个链，则$\bigcup(C) \subseteq X$. 下面，我们证明$\bigcup(C)$必然是$(X, \leqslant)$的一个链．事实上，对于任意的$x, y \in \bigcup(C)$，因为C是$(M, \subseteq)$的链，所以，x, y应当属于M中的同一个成员如T. 而由所设，T应当是$(X, \leqslant)$的链，可见，x和y必关于"$\leqslant$"可较，此即表明$\bigcup(C)$也是$(X, \leqslant)$的链．由M所设，故$\bigcup(C) \in M$，这也就证明了包容序$(M, \subseteq)$关于链的并封闭．由Z_n，存在$(M, \subseteq)$的一个极大元，

记为U. 由于U还是$(X, \leqslant)$中的链，故由题设条件，U在$(X, \leqslant)$中存在上界，将其中一个上界记为b，可以断定，b就是$(X, \leqslant)$的一个极大元．这是因为，如果b不是$(X, \leqslant)$的极大元，那么就一定存在$c \in X$，使得$c > b$. 那么，集合$U \cup \{c\}$，由链的定义，它依然是$(X, \leqslant)$的链，并且是$(M, \subseteq)$中比U大的成员，这就同U是$(M, \subseteq)$中的极大元矛盾．因此，命题Z_m成立．

六、选择公理的等价命题

以 Zorn 引理可以证明以下命题：

定理　设R是一个关系，则存在某个函数$F \subseteq R$，使得

$$\mathrm{dom}(F) = \mathrm{dom}(R).$$

证明：若$R = \varnothing$，则可取$F = \varnothing$，上述引理的成立是显然的．

现在设$R \neq \varnothing$，并记集合

$$M = \{f \subseteq R \mid f \text{ 是函数}\},$$

则$M \neq \varnothing$，因为任取$(x, y) \in R$，则$\{(x, y)\} \subseteq R$必定为一函数．按上述所设，说明按包容序M关于链的并封闭是容易的．因为，如果设C是M的任一个链，因为C的成员都是M的元素，那么C必定是R的子集，于是有$\bigcup(C) \subseteq R$. 以下，我们首先证明关系$\bigcup(C)$一定是函数．这是因为，如果任设$(x, y), (x, z) \in \bigcup(C)$，由于$C$是链，那么，$(x, y), (x, z)$必然要同属于一个函数$f \in C \subseteq M$，所以有$y = x$. 由$\bigcup(C)$是函数且$\bigcup(C) \subseteq R$，故可推出$\bigcup(C) \in M$，从而断定$M$关于链的并封闭．由 Zorn 引理，$M$当有极大元$F$并且$F$就是我们所要找的函数．

最后，我们来证明引理中的等式成立．事实上，如果$\mathrm{dom}(F) \neq \mathrm{dom}(R)$，那么，可取$x \in \mathrm{dom}(R) \sim \mathrm{dom}(F)$，由$x \in \mathrm{dom}(R)$，故存在$y$，使得$(x, y) \in R$. 现在记$F' = F \cup \{(x, y)\}$，那么$F' \in M$，这就同$F$是$M$的极大元矛盾，所以，必然有$\mathrm{dom}(R) = \mathrm{dom}(F)$

成立．

上面所证定理可称为选择公理的等价命题，因为由它的成立去推出选择公理的成立是不难的．例如我们给定选择公理的条件，即设定集族$(A_i)_{i\in I}$，其中标集$I \neq \varnothing$，并且每一项$A_i \neq \varnothing$．现在看关系$R = \{(i,x) \mid i \in I \wedge x \in A_i\}$，由上面已证定理，必然存在函数$a \subseteq R$，使得$\mathrm{dom}(a) = \mathrm{dom}(R) = I$．既然$a \subseteq R$，所以对每个$i \in I$，都有$a(i) \in A_i$．用族的记法，即存在族$(a_i)_{i\in I}$，使每个$a_i \in A_i$．

选择公理的这个等价命题在理论上是重要的，因为它的出现表明了，选择公理、良序化原理和 Zorn 引理这三个命题实际上是两两等价的命题．这意味着，在我们所建立的公理体系中，将它们其中之一作为公理，从理论上说，也就足够了．

思考与练习

1. 设“$<$”是集合 A 中的关系且对任意的 $x,y,z \in A$“$<$”具有性质(1) $x = y, x < y, y < x$ 两两不相容;(2) $x < y \wedge y < z \to x < z$. 现在我们定义:$(x < y \vee x = y) = df(x \leqslant y)$. 证明:“$\leqslant$”满足偏序的定义,即“$\leqslant$”是偏序.

2. 设 R 是集合 A 中的关系,证明:当且仅当 $R = I_A$(I 是 A 上的恒等函数)时,R 同时是 A 中的等价关系和偏序.

3. 给定集合 X 的偏序 R,且令 $A \subseteq X$. 证明:$R \cap (A \times A)$ 是 A 的偏序.

4. 证明:R 是集合 X 的偏序,当且仅当 X^{-1} 是 X 的偏序.

5. 如果 R 是集合 X 中的自返且传递关系,证明:

(1) 若 X 中的关系 S 定义为对任意的 $x,y \in X$,都有:$(x,y) \in S \leftrightarrow (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R$,则 $S \subseteq R$ 并且 S 是 X 中的等价关系;

(2) 若在商集 X/S 中定义关系 $\overline{R}$ 为:$([x]_S,[y]_S) \in \overline{R} \leftrightarrow (x, y) \in R$,证明:$\overline{R}$ 是 X/S 的偏序.

6. 给定序集$(A, \leqslant_A)$和$(B, \leqslant_B)$. 在 $A \times B$ 中定义关系 R 为:对于任意的 $(a,b),(a^{\cdot},b^{\cdot}) \in A \times B$ 都有:$(a,b)R(a^{\cdot},b^{\cdot}) \leftrightarrow a \leqslant_A a^{\cdot} \wedge b \leqslant_B b^{\cdot}$. 证明:$R$ 是 $A \times B$ 的一个偏序.

7. 给定全序集 A,证明:

(1) $\bigcup_{a \in A} \overline{S}(a) = A$;

(2) 若 $A \neq \varnothing$, $\bigcap_{a \in A} S(a) = \varnothing$;

(3) 当 $A \neq \varnothing$,且 A 有最小元 α 时,$\bigcap_{a \in A} \overline{S}(a) = \{\alpha\}$;而当 A 无最小元时,$\bigcap_{a \in A} \overline{S}(a) = \varnothing$.

8. 给定序集(X,R),并且 $A \subseteq X, a \in A$. 证明:a 是 A 的最小元,当且仅当 $\mathrm{ran}(R \cap (\{a\} \times A)) = A$.

9. 给定全序集 X 的截段 A 和 B. 证明:A 是 B 的截段或者 B

是 A 的截段.

10. 证明:若全序集 X 的所有可数子集都是良序的,那么,X 是良序的.

11. 证明:自然数集 ω 与有理数集 Q 等势,但不能按它们本来的顺序相似.

12. 证明:由 $f(x)=ax+b(a>0)$ 确定的映射 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$($\mathbf{R}$ 为实数集)是相似映射.

13. 若序集 $(X,\leqslant_X)$ 与序集 $(Y,\leqslant_Y)$ 相似,证明:如果 $(X,\leqslant_X)$ 为全序,那么,$(Y,\leqslant_Y)$ 为全序;如果 $(X,\leqslant_X)$ 为良序,那么,$(Y,\leqslant_Y)$ 为良序.

14. 证明:任何无穷的良序集都有与自然数集 ω 相似的子集.

15. 对于集合 X 的全序"$\leqslant$",当且仅当 X 是有限集时,$(X,\leqslant)$ 和 $(X,\geqslant)$ 都是良序集.

16. 证明:任一非空有限序集都有最大元.

17. 设 $a\neq b$,写出偶集 $\{a,b\}$ 的一切可能的偏序. 用 Q 记其所有偏序的集合,指出包容序集 $(Q,\subseteq)$ 的极大元.

18. 给定集合 X,并设 Q 是 X 的所有可能的偏序的集合. 证明:若 C 是包容序集 $(Q,\subseteq)$ 的一个链,那么,$\bigcup(C)$ 还是 X 的偏序.

第八章 基数与序数

在人们的社会实践中，自然数主要起着两个方面的作用，即对事物量的表述作用和排序作用．例如，学院暑假组织教师外出旅游，到汽车公司定车时，在 30 座与 40 座的旅游车中选定了 40 座的．为什么不选 30 座的呢？因为学院外出的教师有 37 位，从量上来说，只有 40 才大于 37，可以保证外出者人人有座，并能应对可能的突发情况，这就是自然数在量上对事物的一种表述作用．自然数的排序作用是对事物之间的“次序”或“顺序”关系的一种表达．例如，在期末考试时，多数学校会将考室中的座位按 1,2,3,4 等进行编号，同时把这些编号中的每一个号码随机地发给该考室的任一同学，那么，进考室的时间一到，同学们就会与人无争地对号入座，准备进行考试．

在我们建立的关于自然数集的理论中，一个自然数 n 是指最小归纳集 ω 的一个元素，但 n 本身也是一个集合，其元素还是自然数．在本章中，我们将结合这些已建立起来的理论，考察自然数另外两方面的功能．当然，这些功能在我们前面的理论讨论中，并非是没有一点接触．例如，对于任意给定的有限集 A，存在唯一的自然数 n，使得 $A \approx n$，此时，我们记 $n = N(A)$，并称 n 为集合 A 元素的个数．并且，如果两个集合 A 和 B 有相同的元素个数，即 $N(A) = N(B)$，我们就因此认为它们的元素是一样多；如果 $N(A) < N(B)$，我们就认为 A 的元素个数比 B 的元素个数少，或者反过来

说，B 的元素比 A 的元素多．在这些理论中，自然数被当成了判定有限集元素多少的重要标准．而另一方面，设 $(A, \leqslant_A)$ 是有限良序集，并设它与小于 n 的一切自然数组成的良序集 $(n, \leqslant_\omega)$ 相似，那么，相似对应 $a: n \to A$ 由已证定理就应该是唯一的．这样，我们就得到有限序列 $(a_i)_{i\in n}$，由于该序列是有限的，用列举的方式记，就是 $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$．在这有限的序列中，我们称 a_0 是 A 的第 0 元素，a_1 是 A 的第 1 元素，…，a_{n-1} 是 A 的第 $n-1$ 元素．显然，在这样的称谓中，自然数 n 的诸元素起到了为有限集 A 的元素编排序号的作用．自然数这两方面的功能，前者我们通俗地称为记数功能，后者被称为排序功能．

以上列举的自然数的两种功能之所以是通俗的说法，是因为它们能应用的对象只能是有限集，而对无限集来说，这些作法就无能为力了．因为我们知道，任何一个无限集都不可能与任何一个自然数等势，用自然数也就不可能去判定一个无穷集元素的多少；而两序集若要相似，那么首先需要等势，就此而论，用上面通俗的作法，也不能以任何自然数的元素去给一个无穷良序集的元素排序编号．在下面的讨论中，我们将首先把自然数的概念加以推广，使得推广了的自然数概念对无穷集也能起到上述记数方面的作用，或者使推广后的自然数概念同样能起到对无穷良序集元素的排序编号的作用．自然数的前一推广所涉及的就是下面所要建立的基数概念，而后一推广涉及的则是序数概念．

基数较序数而言，其理论表面上看似乎比较简单，但直接定义反而会出现困难．而序数的概念倒是可以被简单地得到定义．所以，在下面的讨论中，我们就从序数的定义开始．

第一节　序数

先看一些具体的例子．在良序集的讨论中，我们曾指出，集合

$$A=\{1-\frac{1}{n+1}\mid n\in\omega\},$$

$$B=A\cup\{1\}$$

都是的良序集，它们的元素都不能用任何一个确定的自然数的元素完成编码排序．但我们已经证明过，$A\sim\omega$. 因此，不妨把 ω 就作为一个确定的数，而用 ω 的元素给 A 的元素编码．例如，A 的第 0 项为 0，第 1 项为$\frac{1}{2}$，第 2 项为$\frac{1}{3}$，如此等等；对于集合 B，比较集合 A，显然只是多出了元素 1，在自然数集的讨论中我们曾使用过符号 ω^+，但当时按自然数的后继数定义，它表示的是 $\omega\cup\{\omega\}$. 如果现在我们能暂时地把 ω 看成一确定的自然数，那么对于自然数 ω^+，有 $B\sim\omega^+$，按照上述的编号方法，同样有 B 的第 0 项为 0，第 1 项$\frac{1}{2}$为，第 2 项为$\frac{1}{3}$，…，而第 ω 项为 1. 在上述为无穷良序集编码排序的过程中，有一点是共同的，即把良序集 ω 或者 ω^+ 作为大于一切自然数的“数”来处理，而与 ω 或者 ω^+ 相似的良序集都可分别看成是与 ω 或者 ω^+ 为同一“类型”的．这样一来，和自然数可以作为判断有限良序集的“类型”标准一样，ω 和 ω^+ 这两个“数”也就可能作为另外两种非有限的良序集的“类型”标准．我们下面的任务就是把这种可能性合理地通过理论的推演，转化为现实性．

一、序数的定义

由上述讨论，我们所定义的序数，应当满足以下的条件：

1. 序数作为自然数的推广，它应当包含有每个自然数；

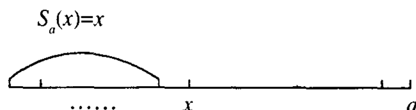
2. 序数作为良序集的“类型”的标准，对于任意给定的良序集，在定义的序数中都应当恰好有一个序数（良序集）与之相似．

显然，要求 1 是容易满足的，因为这只需要把一切自然数的某一共同属性拿来作定义也就可以了．不太容易满足的是条件 2．以下的定义是冯·诺依曼（Jon. Von. Neumann，1903～1957）给出的，他给出的定义不但满足了条件 1 的要求，而且在引入一些新的定理后，还能自动地满足条件 2．

定义　一个良序集 a 被称为一个序数，当且仅当 a 的每一个元素 x 总是 x 在 a 中的前段．即总有

$$\forall x \in a(S_a(x) = x).$$

定义的直观意义如下述图示：



定义中的条件等于是说

$$\forall x \in a \forall \delta \in a(\delta <_a x \leftrightarrow \delta \in x),$$

这无异于说，良序集 a 是一个序数，当且仅当 a 的每一元素 x 都是由 a 中小于 x 的一切元素组成的．

上述序数的定义，无一例外地包含了所有的自然数．例如，设 n 是任一自然数，则按照自然数本身的顺序，n 是有限良序集．对任意的 $x \in n$，那么 x 也是自然数，由自然数集一章所建立起来的理论，X 也是由小于它的所有自然数构成的集合，即有

$$x = \{i \in \omega \mid i < x\} = S_\omega(x) = S_n(x),$$

可见,n 满足序数的定义;由于 $n \in \omega$ 的任意性,所以,每个自然数都是序数.

其次,上述定义肯定了无穷良序集 ω 是序数.这是因为,自然数集 ω 总是满足定义 $\forall n \in \omega(S_{\omega}(n) = n)$.这样,除了有限的序数即自然数外,我们又有了无穷的序数 ω,在此定义下,自然数集 ω 就是一个确定的数!我们把无穷的序数称为超限序数.由上述序数定义中的条件,超限序数可以有无穷多.例如,当 ω 作为一个确定的数处理后,那么对于 $\omega^{+} = \omega \cup \{\omega\}$,在 ω 中仍保留自然数原来的顺序,并规定每个自然数都是小于 ω 的,那么,由定义不难验证,带有规定顺序的 ω^{+} 依然是一个序数.

一般来说,不难验证,如果 a 是序数,在保持 a 的元素原来顺序的条件下,那么 a^{+} 是序数,并且 a^{++},a^{+++} 等都是序数.我们知道,任何自然数 n 的后继数是自然数,上述可验证的断定说明了冯·诺依曼给出的序数定义依然保留了自然数的这一特点.以下的定理则说明,上述定义的序数仍然保留着自然数的其他一些重要的性质.

二、序数的基本性质

定理 对于任何序数 a,若 $a \neq 0$,则 0 就是 a 的最小元.

对于每个不为 0 的自然数来说,都是以 0 为其最小元的.上面的定理等于是说,任何一个序数也都保留了自然数的这一特征.

证明:由定理条件和序数定义,a 是非空良序集.由良序集必定有最小元,不妨设 x_0 是 a 的最小元,由前段的定义就有

$$S_a(x_0) = \varnothing = 0;$$

再由序数的定义,有

$$x = S_a(x_0) = 0.$$

即任何非空序数都以 0 为其最小元.

定理 序数的元素都是序数.

证明:设 x 是序数 a 的任一元素,那么,由序数的定义,$x = S_a(x)$. x 作为良序集 a 的真截段,x 是良序集;而对于任意的元素 $\delta \in x$,显然有 $\delta \in a$,由序数的定义,$\delta = S_a(\delta) = S_x(\delta)$. 所以由定义,$x$ 一定是序数. 由 $x \in a$ 的任意性,可见,序数的任意元素必定还是序数.

本定理证明了任意自然数 n 的元素是序数、自然数 ω 的任意元素 n 是序数的这一特征,仍然保留在推广了的序数的概念之中,例如,序数 ω^+ 的所有元素是任一自然数 n 和自然数集 ω,但它们都是序数,无论它们是有限的还是无限的.

定理 相似的序数都相等.

两个等势的自然数必定是相等的,本定理利用相似的关系来说明,等势的序数依然保留有自然数的这一性质.

证明:设 a,b 是相似的两个序数,并设 f 是由 a 到 b 上的相似映射. 现在只要能证明 f 是 a 上的恒等映射,即能够证明对于任意的 $x \in a$,都有

$$f(x) = x$$

就可以了. 我们利用超限归纳法,设对于任意的 $x \in a$,排序编号在 x 前面的一切 δ 都满足关系

$$\forall \delta \in S_a(x)(f(\delta) = \delta),$$

从而证明 x 也满足这个关系就可以了.

事实上,设 $y \in f(x)$,则因 b 是序数且 $f(x) \in b$,故 $f(x) = S_b(f(x))$,从而在 b 的排序中 y 是小于 $f(x)$ 的,即有 $y <_b f(x)$;因 f 是恒等映射,故有 $f^{-1}(y)$ 在 a 的排序中是小于 x 的,即又有 $f^{-1}(y) <_a x$. 由归纳假设,有

$$y = f(f^{-1}(y)) = f^{-1}(y) <_a x,$$

这表明,$y \in S_a(x) = x$.

反之,若设 $y \in x = S_a(x)$,此即 $y <_a x$. 同样由 f 的相似性,

可得到 $f(y) <_b f(x)$. 再由归纳假设,可得 $y = f(y) <_b f(x)$,可见,$y \in S_b(f(x)) = f(x)$.

综上所述,只要归纳假设成立,就一定能推出 $f(x) = x$,由 $x \in a$ 的任意性和超限归纳原理,f 在定理所设条件下必定是恒等映射,因此,相似的两个序数 a,b 必然相等. 由 a,b 的任意性,相似的序数必然都相等.

定理"相似的序数必然都相等"的成立,解决了序数定义前我们曾提出的、序数应当满足的要求 2 的一半. 这是因为,序数作为良序集的"类型"的标准,要求对任意给定的良序集,在定义的序数中都应当恰好有一个序数(良序集)与之相似. 先设良序集 A 同序数 a,b 都相似,则由相似的传递性,a 和 b 相似,从而有 $a = b$. 可见,一个良序集在所证定理的要求下,最多能与一个序数相似,这表明,如果一个良序集能够同某个序数相似,那么,这个序数必定是唯一的.

第二节　序数之间的顺序

一、序数的三歧性

良序集的可较原理断定，对于任意的两个良序集 a,b，以下的三种情况中恰好有一种成立：

1. $a \sim b$;

2. $a \sim b$ 的某一真截段；

3. a 的某一真截段 $\sim b$.

由前述定义，序数显然是特殊种类的良序集，两个序数之间的比较，除了应符合良序集的可较原理外，还应该有哪些特殊的结果呢？

首先，如果以上第一种情况中的 a,b 是序数，那么由两序数的相似必然有 $a = b$.

其次，如果以上二种情况中的 a,b 是序数，按序数的定义，序数 b 的真截段 c 必定是 b 的元素，有 $c \in b$；并且由已证定理，c 还是序数，$a \sim c$ 等价于 $a = c$，于是有 $a \in b$.

最后，如果以上第三种情况中的 a,b 是序数，与第二种情况同理，必定有 $b \in a$.

对于第二种情况中的 $a \in b$，由于 a 相似并由此等价于 b 的某一真截段，因此显然有 $a \subsetneqq b$；反之，若设序数 a,b 之间的关系为 $a \subsetneqq b$，则上述三种情况中的第一、第三种情况都不可能成立．这表明，当 a,b 是序数时，第二种情况中的 $a \in b$ 实际上是和 $a \subsetneqq b$ 等价的．同理，上述第三种情况中的 $b \in a$，实际上是和 $b \subsetneqq a$ 等价的．综上所述，我们有下述的定理：

定理　对于任意的两个序数 a 和 b，以下三种情况中恰好有

一种成立：

1. $a = b$;

2. $a \in b$,或者 $a \subsetneqq b$,此时 a 必定是 b 的某一真截段;

3. $b \in a$,或者 $b \subsetneqq a$,此时 b 必定是 a 的某一真截段.

本定理所反映的是序数之间的三歧性.下面的定理则反映的是序数之间所具有的传递性.

定理 每个序数都是传递集.即对于任一序数 a,都有

$$\forall y \forall x(y \in x \wedge x \in a \rightarrow y \in a).$$

证明:若 $x \in a$,则 $x = S_a(x)$. 若 $y \in x$,则 $y \in S_a(x) \subseteq a$,所以,$y \in a$. 即 a 是传递集.

二、序数之间的顺序

定义 对于两个序数 a 和 b,当且仅当 $a \in b$,称 a 小于 b 或者说 b 大于 a. 记为

$$a < b \text{ 或者 } b > a.$$

由上述讨论,当序数 a 是序数 b 的真截段时,显然 $a < b$,$b > a$,$a \in b$ 和 $a \subsetneqq b$,这些说法都是等价的.应当指出,上述定义同自然数之间的"$<$"实际上是一致的.

由定义还不难看出,对于序数 a 和 b,有

$$a \leqslant b \leftrightarrow a \subseteq b,$$

此即 $a < b$ 或者 $a = b$. 于是,我们可得到序数三歧性定理的等价定理:

定理 对于任意的两个序数 a 和 b,以下三种情形中恰好有一种成立:

$$a = b, a < b, b < a.$$

对于序数的传递性定理,利用三歧性等价定理也可表达为:

定理 设 a,b,c 是序数,则有

$$a < b \wedge b < c \rightarrow a < c.$$

在前面的讨论中，我们用 $S_a(x)$ 记 $x \in a$ 在 a 中的前段，它表示 $S_a(x)$ 是由一切在 a 的良序中排序编号在 x 之前的元素所组成的集合．现在，对于序数 x，我们用 $S(x)$ 记一切小于 x 的序数组成的集合，即

$$S(x) = \{y \mid y \text{ 是序数且 } y < x\}.$$

在以下讨论中，我们把上述的 $S(x)$ 称为序数 x 的绝对前段．下面的定理反映了一个序数与其绝对前段之间的关系：

定理　任一序数总和它的绝对前段相等．即如果 x 是序数，则

$$S(x) = x.$$

证明：一方面，设 $y \in S(x)$，则按照绝对前段的定义，y 是序数并且 $y < x$，则由序数的三歧性等价定理，有 $y \in x$. 另一方面，若设 $y \in x$，则由已证定理，有 y 是序数，于是 $y < x$，当然有 $y \in S(x)$.

本定理等于说，每个序数实际上都是由小于它的（或在它前面的）一切序数组成的一个良序集．按照序数的定义，每个序数 a 都是一个特殊种类的良序集，并且每个这样的良序集 a 都有它自己的排序方法，我们常常记为"$<_a$"．在本定理证明之前，我们定义了绝对前段，它和在前所证明的定理如三歧性等，实际上规定了序数之间的一种绝对顺序"$<$"．本定理就是这种规定的表现，它把序数各自原有的顺序都统一在了这个绝对顺序"$<$"之中．事实上，若 a 是序数，并且 $x \in a$，则由已证定理，x 是序数，按本定理或序数的定义，有

$$S(x) = x = S_a(x),$$

这就是说，对于任意的 $y, x \in a$，都有

$$y < x \leftrightarrow y <_a x.$$

因此，以后除非必要，就不必再区分"$<_a$"和"$<$"，也不必再区分 $S_a(x)$ 和 $S(x)$.

定理 若序数 $a < b$，则 $a^+ \leqslant b$.

证明：若序数 $a < b$，则由已证，$a \in b$. 因为序数依然是集合，所以有 $a^+ \in b^+$. 由集合后继的定义，$a^+ \in b \cup \{b\}$，所以，或者有 $a^+ = b$，或者有 $a^+ \subset b$，此即 $a^+ \leqslant b$.

推论 在序数 a 与其后继者 a^+ 之间，不存在另外的序数.

推论的成立是明显的. 而定理和推论表明，在后继这一关系上，序数和自然数是一致的. 例如，由已证定理可知，0是最小的序数，而0和 $0^+ = 1$ 之间因为没有其他的序数，可见，紧跟在0后的序数就是1，而紧跟在序数1后的一定是2，如此等等.

现在，由我们已建立起来的关于序数的理论可以看到，序数保留了自然数的许多性质，这说明序数的 Von. Neumann 定义在从自然数到序数的推广过程中的确是卓有成效的. 但是，序数毕竟不同于自然数，因此，一般序数并不能保留自然数的所有特征. 例如，我们曾证明过，每个非0自然数都有先行者，但一般的非0序数却不见得都有先行者，如 ω 是序数，但 ω 就没有先行者.

定义 没有先行者的非零序数称为极限序数.

极限序数是说，对于序数 a，当且仅当 $a \neq 0$，并且不存在序数 b，使得 $b^+ = a$，就说 a 是一个极限序数，如上面提到的 ω. 显然，自然数都不能是极限序数.

自然数与序数之间的差别还不仅如此. 例如，自然数和"$<$"构成的序偶$(\omega, <)$，构成一个全序集，并具有三歧性和传递性. 但能否说一切序数构成的集合与"$<$"组成的序偶也构成一个全序集，并且也具有这些相应的性质呢？这是不可以的. 因为，下面稍后出现的定理表明，一切序数不能构成集合. 不过，虽然一切序数不能构成集合，但在一定的条件下，无论是由哪些序数构成的集合，这些集合不但是全序集，而且是良序集.

定理 设 A 是由序数组成的集合，那么，$(A, \leqslant)$ 必定是良序集.

证明：设 A 是由序数构成的集合，任取 $E \subseteq A$ 并且 $E \neq \varnothing$. 现在任取 $a \in E$. 若 a 是 E 的最小元，那么由良序集的定义，则所证定理已成立. 为说明一般性，不妨设 a 不是 E 的最小元. 现取 $b \in E$，并使 $b < a$. 由序数性质，必定有 $b \in a$，可见，$a \cap E \neq \varnothing$. 因为 a 是序数，所以 a 是良序集，因此 a 的非空子集 $a \cap E$ 一定有最小元，设为 c. 下面，我们证明，c 也是 E 的最小元.

事实上，如果 c 不是 E 的最小元，则必定存在 $d \in E$，使得 $d < c$，同样由序数的性质，必定有 $d \in c$. 但 c 是属于 a 的由每个序数都是传递集，有 $d \in a$. 由此得 $d \in a \cap E$，这同 c 是 $a \cap E$ 的最小元的假设矛盾. 所以，c 必定是 E 的最小元，从而 E 是良序集.

推论 设 A 是由序数组成的集合，则 $\bigcup(A)$ 仍是序数.

证明：设 $\delta = \bigcup(A)$，由于序数的元素仍是序数，所以，δ 还是一个有序数构成的集合. 由上所证，δ 是良序集. 为了说明 δ 是序数，我们只要能证明对任意的 $x \in \delta$，都有 $S_\delta(x) = x$ 就可以了. 实际上，由 $x \in \delta$，可知 x 必定属于 A 中某一序数，不妨令其为 a，显然就有 $x = S_a(x)$；但 a 同时是 $\bigcup(A) = \delta$ 的一个截段，所以必然有 $S_a(x) = S_\delta(x)$，因此，$x = S_\delta(x)$ 成立，即 $\bigcup(A) = \delta$ 是序数.

三、序数集合的界

定义 设 A 是由序数构成的集合. 当且仅当存在一个序数 λ，使得对任意的序数 $a \in A$，都有 $a \leqslant \lambda$，则称 λ 是集合 A 的一个上界；当且仅当存在一个序数 λ，使得对任意的序数 $a \in A$，都有 $\lambda \leqslant a$，则称 λ 是集合 A 的一个下界.

序数集 A 的上界和下界都不是唯一的. 在序数集的所有上(下)界中，如果没有比 λ 更小(大)的上(下)界，则称 λ 是序数集 A 的上(下)确界.

对序数集的界的定义，同前面对序集定义的界是有区别的.

在序集中，一个序集 $A\subseteq X$ 的上界(或者下界)只是在序集 X 中来考虑的. 例如，由一切偶数构成的集合 ω_e，我们只在自然数集中考虑它的上界，而这样的上界事实上对 ω_e 来说是不存在的. 而对序数集的界是在绝对意义下说的，因此，ω,ω^+ 等都可以是 ω_e 的上界，并且，ω 是 ω_e 唯一的上确界.

定理 任何序数集都存在上界.

证明:设 A 是由序数构成的任一集合. 对 A 求并，并设 $\lambda=\bigcup(A)$，由上面所证推论，则 λ 依然是一序数. 下面我们证明 λ 就是 A 的一个上界.

事实上，对于任意的元素 $a\in A$，$a\subseteq\lambda$，故由序数之间的顺序，$a\subseteq\lambda\leftrightarrow a\leqslant\lambda$. 由上界定义，定理成立.

定理 不存在由一切序数构成的集合.

证明:(反证) 如果存在由一切序数构成的集合，不妨记为 A，那么，由上面证明的定理，必然存在序数 λ，使得对于任意的 $a\in A$，都有 $a\leqslant\lambda$，即 λ 是 A 的一个上界. 再由序数的后继还是序数，这样，就存在序数 λ^+，严格地大于 A 的任何一个元素，从而 $\lambda^+\notin A$，显然，这同 A 是由一切序数构成的集合是矛盾的，因此假设不能成立，而原定理成立.

本定理表明，只要承认所有的序数能够构成一个集合，就一定会引出逻辑悖论. 这个悖论，通常被人们称为布拉里 — 福迪(Burali — Forti) 悖论，或者最大序数悖论.

第三节　替换公理

一、关于公理的小结

在介绍替换公理之前，我们对本书所涉及的公理作一个小结．这对公理集合论的理解是有意义的．

外延公理（第二章，第一节）；

空集公理（第二章，第一节）；

子集公理（第三章，第一节）；

偶集公理（第三章，第二节）；

并集公理（第三章，第三节）；

幂集公理（第三章，第六节）；

无穷公理（第五章，第二节）；

选择公理（第六章，第四节）．

本书在前面的论述中，以上述 8 条公理为出发点，推出了其他的理论．但是，一个公理系统作为出发点的公理太多毕竟不是有利的，当我们需要证明公理的独立性一类问题时，过多的公理在理论推演中就会变成一种累赘．下面介绍的替换公理，对公理的简化应当是非常有益的．

二、替换公理

设给定集合 A，并给定含有元素 x,y 的公式 $\varphi(x,y)$，其中，$x \in A$，y 满足单值条件

$$\forall x \in A \forall y_1 \forall y_2 (\varphi(x,y_1) \wedge \varphi(x,y_2) \rightarrow y_1 = y_2).$$

以上所设意味着，对于任意的 $x \in A$，满足公式的 y 最多只有一个．于是，我们能否由此断言，所有的满足公式 $\varphi(x,y)$ 的序偶 (x,y) 一定构成一个函数呢？虽然，我们知道一个函数集首先要求是一个由序偶构成的集合，并且已知序偶 (x,y) 的条件

$$x \in A \wedge \varphi(x,y)$$

也是清楚并且确定的，但在这些条件中，我们的确找不到这些序偶的包容集．因此，从理论上说，我们无法用子集公理来证明满足该条件的序偶 (x,y) 就必定构成一个集合．事实上，虽然序偶的第一坐标 x 都是集合 A 的元素，但第二坐标 y 的范围却是不确定的，在这样的条件下，我们不但无法用子集公理来证明 (x,y) 能构成集合，引用其他的公理显然也是无济于事的，这就需要建立一个新的公理来保证满足上述条件的 (x,y) 能够构成一个函数．实际上，这样的想法并非是毫无根据的，因为既然一个 x 在对应 φ 的作用下，最多有一个 y 与之对应，可以想象由所有的满足条件的 y 构成的集合不会比 A 集的元素更多，这意味着由满足条件的所有的 y 所构成的集合必定是受制于集合 A 的，因此，y 所构成的集合必定是一个范围确定或有限的集合．

替换公理　设给定集合 A，并给定不含有 F 和 B 的公式 $\varphi(x,y)$，满足条件

$$\forall x \in A \forall y_1 \forall y_2 (\varphi(x,y_1) \wedge \varphi(x,y_2) \rightarrow y_1 = y_2),$$

则一定存在函数

$$F = \{(x,y) \mid x \in A \wedge \varphi(x,y)\},$$

从而也存在一个集合

$$B = \operatorname{ran}(F) = \{y \mid \exists x \in A \wedge \varphi(x,y)\}.$$

替换公理用通俗的话来说，就是通过满足条件 $\forall x \in A \forall y_1 \forall y_2 (\varphi(x,y_1) \wedge \varphi(x,y_2) \rightarrow y_1 = y_2)$ 的公式 $\varphi(x,y)$，由每个 $x \in A$ 最多可以得到一个 $y = F(x)$，现在，用得到的每一个 y 替

换相应的 x，就能够得到一个确定的集合.

替换公理应当是一条公理模式. 对每一个具体的公式 $\varphi(x,y)$ 而言，都应当有一条具体的替换公理，公理模式只不过是对这些所有的具体公理的一个概括而已. 在替换公理的应用中，对公理中所断定的两种存在性，即函数和集合，尽管从集合的角度说，函数也是集合，引用了函数的存在，也就是肯定了集合的存在，但人们通常更多的是直接引用集合的存在性.

建立了替换公理以后，我们原来设立的某些公理在系统中反而具备了可证性. 例如，

例 1 用替换公理证明子集公理.

证明：设给定集合 A，并设 $C(x)$ 是一个不含集 B 的条件. 现在令公式 $\varphi(x,y)$ 为

$$C(x) \wedge y = x.$$

对于每个 $x \in A$，最多有一个 y 满足上述的 $\varphi(x,y)$，即当 $C(x)$ 成立时，$y = x$. 按照替换公理，必定存在集合 B，使得

$$\forall y(y \in B \leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge (C(x) \wedge y = x))),$$

它等价于：存在集合 B，使得

$$\forall y(y \in B \leftrightarrow x \in A \wedge C(y)).$$

这就证明了子集公理.

例 2 利用空集公理、幂集公理和替换公理证明偶集公理.

证明：由空集公理和幂集公理，空集 $\varnothing$ 和幂集 $\wp(\varnothing)$，$\wp(\wp(\varnothing))$ 都是存在的. $\varnothing$ 和 $\wp(\varnothing)$ 都是 $\wp(\wp(\varnothing))$ 的元素. 并且不难证明，$\wp(\wp(\varnothing))$ 的元素只能是 $\varnothing$ 和 $\wp(\varnothing)$，由于 $\varnothing \neq \wp(\varnothing)$，因此，$\wp(\wp(\varnothing))$ 仅有的两个元素肯定是不同的. 在替换公理中，取 $A = \wp(\wp(\varnothing))$，并对任意给定的集合 a,b，取公式 $\varphi(x,y)$ 为

$$(x = \varnothing \wedge y = a) \vee (x = \wp(\varnothing) \wedge y = b),$$

于是，对于每个 $x \in A = \wp(\wp(\varnothing))$，只能有唯一的 y 满足 $\varphi(x,y)$，也就是对于确定的集合 $\varnothing$ 或者 $\wp(\varnothing)$，能与之对应的就只能

是确定的 a 或者 b. 故由替换公理,存在集合 $B = \{y \mid y = a \vee y = b\}$. 按照定义,$B$ 就是偶集 $\{a,b\}$.

以上的例子表明,当我们在系统中增加了替换公理后,原来所给出的 8 条公理并不再都是系统所必要的了,其中有的完全可以从尊贵的公理位置上降为一般的定理,当然,这对公理系统的性质研究,肯定会带来许多的方便.

多数的集合论教材除了介绍以上 9 条公理之外,还给出了一条**正则公理**:设给定集合 $A \neq \varnothing$,则存在 A 的成员 x,使得 $x \cap A = \varnothing$. 在集合理论文献中,通常把上述 10 条公理构成的系统称为 Zermelo－Fraenkel 公理系统,简记为 ZF 系统. 本书作为集合论公理系统的导引,理论所涉及的深度毕竟是有限的,因此,本书不再介绍正则公理.

第四节　计数原理

在本章第一节中，我们曾希望我们所定义的序数是满足这样的一类标准的良序集：

1. 序数作为自然数的推广，它应当包含有每个自然数；

2. 序数作为良序集的“类型”的标准，对于任意给定的良序集，在定义的序数中都应当恰好有一个序数（良序集）与之相似．

显然标准 1 要求序数概念是自然数概念的推广，而标准 2 要求每一个良序集都恰好有一个与它相似的序数．在第一节的例中我们也看到，要求是容易被满足的：因为每一个自然数都是一个序数．对于标准 2，我们在假设每个良序集都有序数与之对应的基础上，证明了这样的序数的唯一性．下面，我们在引入的替换公理基础上，就来说明标准 2 中要求的序数的存在性问题．

计数原理　对于任何良序集 X，存在唯一的序数与之相似．

在计数原理给定的条件下，直接找出与 X 相似的序数显然是有困难的．我们证明的思路如下：先我们不管有无序数与 X 相似，而看 X 的能与序数相似的截段．很明显，良序集 X 的这样的截段是一定存在的．例如，空集 $\varnothing$ 是 X 的截段，那么，与 $\varnothing$ 相似的序数是 0；以 x_0 为 X 的最小元，那么，由 X 是良序集，这样的 x_0 也是肯定存在的，于是，$\{x_0\}$ 必然是 X 的一个非空的截段，它一定同 1 相似，如此等等．现在，我们一般地用 Y 记 X 的能与序数 β 相似的截段，并把这样的一切的 Y 并起来，我们希望通过推理能够证明，$\bigcup(Y)=X$；而把相应的 β 也并起来，得到某个序数 α，同样希望能证明这个 $\alpha\sim X$．这就是我们以下所要去做的．

证明：唯一性已成立，以下证明存在性．

以 A 记良序集 X 的一切截段组成的集合，即

$$A = \{Y \mid Y \text{ 是 } X \text{ 的截段}\},$$

并以公式 $\varphi(Y,\beta)$ 记"Y 与某一序数 β 相似"．由第一节已证，对于任意的 $Y \in A$，最多有一个序数 β 使得公式 $\varphi(Y,\beta)$ 成立，所以，由替换公理，必定存在集合

$$B = \{\beta \mid \exists Y \in A \wedge \varphi(Y,\beta)\},$$

这就是说，B 是所有的能与良序集 X 的截段相似的序数构成的集合．

另一方面，令 $W \subseteq A$ 为一切能与序数相似的 X 的截段的集合，即

$$W = \{Y \in A \mid \varphi(Y,\beta)\}.$$

现在，对 B 和 W 分别求并，并记

$$\alpha = \bigcup(B), M = \bigcup(W),$$

由第二节已证推论，序数的并是序数，故 α 是序数．下面，我们所要做的，就是证明 $\alpha \sim X$.

首先 $M \sim \alpha$. 在上述设定的基础上，我们构造一个从 M 到 α 上的相似映射 f 如下，即：对于每个 $x \in M$，x 必然属于某个 $Y \in W$. 并且，设 $\beta \in B$ 就是与 Y 相似的序数，用 f_Y 记从 Y 到 β 上的相似映射，规定：

$$f(x) = f_Y(x).$$

显然，这样定义的 f 与 Y 的选择是无关的．事实上，设 $x \in Y_1$ 并且 $x \in Y_2$，由于 Y_1, Y_2 都是 X 的截段，因此，两者中必有一个是另一个的截段．由于两良序集之间若存在相似映射，那么这样的相似映射必然是唯一的，现在较小的截段中引用两良序集之间相似映射的这一结论，就必然有 $f_{Y_1}(x) = f_{Y_2}(x)$. 这样定义的 $f: M \to \beta$ 必定是相似映射．因为，对于任意 $x_1, x_2 \in M$，一定存在某个 $Y \in W$，使得 $x_1, x_2 \in Y$，那么，如果 $x_1 < x_2$，则 $f_Y(x_1) < f_Y(x_2)$，此即 $f(x_1) < f(x_2)$，可见，f 是严格递增的．而由所设，$\mathrm{ran}(f) = \alpha$ 是

显然的.

其次,我们证明 $M = X$.

首先,由上所设,M 肯定是 X 的截段,因此,我们只要能够证明 M 不能是 X 的真截段就可以了. 事实上,如果 M 是 X 的真截段,则一定存在 $\gamma \in X$,使得 $M = S_X(\gamma)$. 由于已证 $M \sim \alpha$,所以有 $M \cup \{\gamma\} \sim \alpha^+$. 这样,$M \cup \{\gamma\} = \overline{S}_X(\gamma)$ 依然是 X 的截段并且与序数 α^+ 相似,从而也应当属于 W,这就同 $M = \bigcup(W)$ 的假定相矛盾,所以 M 不能是 X 的真截段,$M = X$.

综上所述,计数原理成立.

计数原理解决了与良序集相似的序数的存在性问题. 现在,我们可以概括起来说,序数本身就是一类标准的良序集. 其中,0 是最小的一个序数,每个序数都是有小于它的所有的序数来构成的;而对于任意的良序集,都必定存在唯一的某个序数与之相似. 以后,我们把与良序集 X 相似的唯一序数,称为 X 的序数,记为

$$\alpha = \operatorname{ord}(X).$$

当 X 是有限集时,$\operatorname{ord}(X)$ 与 X 的元素的个数 $N(X)$ 重合,即有

$$\operatorname{ord}(X) = N(X);$$

当 X 是无限时,一般情况下,按自然数 ω 的顺序,X 与 ω 相似,$\operatorname{ord}(X) = \omega$. 例如,令

$$X = \{1 - \frac{1}{n+1} \mid n \in \omega\},$$

则按照有理数本来的顺序,$X \sim \omega$,其序数就是 ω. 而在此基础上,良序集 $X \cup \{1\}$ 的序数就是 ω^+,良序集 $X \cup \{1,2\}$ 的序数就是 ω^{++} 等.

第五节　选择公理的另一个等价命题

在前一章，我们曾用良序化原理证明过无序集的可较原理，即对任意两个集合 A 与 B，情形 $A \lhd B$ 和 $B \lhd A$ 中至少有一个成立．现在，添加了替换公理以后，我们将用无序集的可较原理来证明良序化原理．当然，为避免推理上的循环，我们在证明中不会使用与良序化原理等价的选择公理．而在证明前，利用替换公理和计数原理（它们都是不依赖选择公理或良序化原理的）先证明一个预备定理：

定理　对于任意集 A，存在一个序数 α，使得 α 受制于 A 不能成立．

证明：欲证 $\alpha \lhd A$ 不成立，我们先来看 A 的一切能赋予良序"$\leqslant_B$"的子集 B，既然，我们并没有假定 A 的所有子集，特别是 A 本身都是能良序化的．能够良序化的子集总是存在的，例如空集．我们可以证明，由一切这样的良序集 B 组成的序偶$(B, \leqslant_B)$构成一个集合．

事实上，由于 $B \in \wp(A)$，而关系"$\leqslant_B$"是由某些序偶$(x, y) \in B \times B$组成的集合，故关系"$\leqslant_B$"应当是 $B \times B$ 从而是 $A \times A$ 的子集，有 $\leqslant_B \in \wp(A \times A)$．可见$(B, \leqslant_B) \in \wp(A) \times \wp(A \times A)$．于是由子集公理，

$$W = \{(B, \leqslant_B) \mid B \subseteq A \wedge \leqslant_B \text{是} B \text{的良序}\}$$

应当是一个集合．再按计数原理，良序集$(B, \leqslant_B)$也应当有唯一的序数 β 与之相似．在替换公理中，不妨取 $\varphi(x, y)$ 为 $\varphi((B, \leqslant_B), \beta)$ 此时的 φ 意为：$(B, \leqslant_B) \sim$ 序数 β．这样，由替换公理，就得到由上述的序数 β 替换原来的$(B, \leqslant_B)$所构成的集合 M，即

$$M = \{\beta \mid \exists (B, \leqslant_B) \in W \wedge \varphi((B, \leqslant_B), \beta)\}.$$

既然 M 是由序数组成的集合，由已证，一定存在序数 $\alpha \notin M$，下面我们就证明，就是这样的 $\alpha \lhd A$ 不能成立．

反证：如果 $\alpha \lhd A$ 成立，则 α 必定与 A 的某个子集 B 等势．这样，不妨设 f 是从 α 到 B 上的那个双射，那么，可以通过这个 f 把 α 的良序传授给 B：即对于任意的 $\chi, \delta \in \alpha$ 规定

$$\chi < \delta \leftrightarrow f(\chi) <_B f(\delta).$$

于是，"$\leqslant_B$" 就是 B 的一个良序，所以，$(B, \leqslant_B) \sim \alpha$ 并且，$(B, \leqslant_B) \in W$. 这样，有上面已证，必然有 $\alpha \in M$ 这同 $\alpha \notin M$ 是矛盾的，假设不能成立，即 $\alpha \lhd A$ 不成立．

以上的证明是不依赖于选择公理及其任一结果的，但依赖于替换公理．我们在此基础上，假定无序集的可较原理已成立，来证明良序化原理．

任意给定集合 A，由上面已证定理，存在一个序数 α，使得 $\alpha \lhd A$ 不成立．由无序集的可较原理，此时 $A \lhd \alpha$ 成立．这表明，集合 A 肯定与 α 的某个子集 M 等势．由于 M 是序数 α 的子集，所以 M 当然是良序集，不妨就设 f 是从 M 到 A 上的双射．那么，如同上面定理证明的末尾的作法一样，通过 f 把 M 的良序传授给 A，于是我们得到了 A 的一个良序"$\leqslant_A$". 这就证明了，任意的集合 A 都是可以良序化的，良序化原理成立．

过去我们是用良序化原理去证明无序集的可较原理的，现在又用后者证明了前者，可见，在引入替换公理后，良序化原理和无序集的可较原理是等价的．在引入替换公理前，我们曾指出：选择公理、良序化原理和 Zorn 引理是两两等价的命题．在引入替换公理后，我们现在可以得出进一步的结论：在除去选择公理但包含替换公理的 ZF 公理系统中，无序集合可较原理和以上三个原理也是互相等价的．

第六节　序数的和与积

在自然数集一章中，我们曾以递推的方式定义了自然数的加法、乘法和乘方运算．下面，我们从序数的角度来考查其中的加法和乘法．

一、序数的加法

先看一个具体的实例：求序数2与3的和．在这里，2，3作为良序集，有$2=\{0,1\}$，$3=\{0,1,2\}$．我们希望用求并的方法来确定$2+3$，但是，$2\cup 3=3$．因此，在求并之前，需要对2和3的元素进行区别．看由序偶组成的良序集：

$$\overleftrightarrow{2}=\{(0,0),(1,0)\},\overleftrightarrow{3}=\{(0,1),(1,1),(2,1)\},$$

它们的元素互不相容．现在来求$\overleftrightarrow{2}$和$\overleftrightarrow{3}$的并，得到良序集

$$\overleftrightarrow{2}\cup\overleftrightarrow{3}=\{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1),(2,1)\},$$

这个良序集的元素恰好就等于$5=\{0,1,2,3,4\}$．下面关于序数的和的定义就是沿着这样的思路展开的．

定义　给定序数M,N，记

$$\overleftrightarrow{M}=\{(x,0)\mid x\in M\};$$

$$\overleftrightarrow{N}=\{(y,1)\mid y\in M\},$$

现在记$C=\overleftrightarrow{M}\cup\overleftrightarrow{N}$．那么，如下定义$C$中的良序：对于任意的$x,x'\in M$和任意的$y,y'\in N$，规定：

1. $(x,0)<(y,1)$，

2. 当且仅当 $x < x'$ 时，$(x,0) < (x',0)$，

3. 当且仅当 $y < y'$ 时，$(y,1) < (y',1)$.

我们称 $I = \mathrm{ord}(C)$ 为序数 M 和 N 的和，记为

$$I = M + N.$$

定义可分为两个部分．首先是对序数 M 和 N 的元素加以区别．从序数对相应良序集相似的唯一性来说，就是把序数 M,N 转变为良序集 $\overleftrightarrow{M},\overleftrightarrow{N}$. 其次，是对转变得到的良序集的元素规定了一个严格的顺序，这既涉及 $\overleftrightarrow{M}$ 的元素的顺序，$\overleftrightarrow{N}$ 的元素的顺序，也涉及 $\overleftrightarrow{M}$ 和 $\overleftrightarrow{N}$ 的所有元素的顺序．由于在定义中把相应于 $\overleftrightarrow{N}$ 的元素总是排在相应于 $\overleftrightarrow{M}$ 的元素后面，因此可以预计 $M+N$ 不一定等于 $N+M$. 例如，由定义可以证明，$\omega + 1 = \omega^{+}$，但 $1 + \omega = \omega$. 因此，一般情况下，序数加法的交换律并不成立．

对于任意给定的序数 M,N,O，一般情况下，下述的运算律成立：

$$M + 0 = 0 + M = M;$$
$$M + 1 = M^{+};$$
$$(M + N) + O = M + (N + O).$$

自然数按照自然数中原本的顺序是良序集，所以自然数是序数的特殊情况．那么，现在定义的序数加法在自然数 m,n 分别等于上述的序数 M,N 时，$m + n$ 同自然数集中讨论的加法运算是一致的吗?其实，只要能够验证这里定义的序数加法能满足自然数加法的递推定义就可以了．事实上，按照上述序数加法的运算律. 有 $m + 0 = m$，即序数加法是满足自然数加法递推定义的条件 1 的；其次是，

$$\begin{aligned} m + n^{+} &= m + (n + 1) \\ &= (m + n) + 1 \\ &= (m + n)^{+}, \end{aligned}$$

即序数加法是满足自然数加法递推定义的条件 2 的．可见，这里定义的序数加法也应当是自然数加法定义中的唯一运算，所以，当 M 和 N 本身就是自然数时，它们之间的加法运算和自然数之间的加法运算就是一致的了．

二、序数的乘法

对于序数的乘法，我们依然首先从特殊的序数即自然数的角度来考虑．例如，以自然数 2 与 3 的乘积为例，作为有限良序集，$2=\{0,1\}$，$3=\{0,1,2\}$，按照下述顺序记 2×3 的笛卡尔乘积：

$$\begin{aligned}2\times 3&=\{0,1\}\times\{0,1,2\}\\&=\{(0,0),(1,0);(0,1),(1,1);(0,2),(1,2)\}.\end{aligned}$$

我们看到，2×3 的元素恰好等于 6 个，即有

$$2\times 3=6.$$

以下，是一般的序数的积的定义：

定义　任意给定序数 M 和 N，记 $D=M\times N$，并如下规定 D 中的良序：对于任意的 $x,x^*\in M$ 和任意的 $y,y^*\in N$，都有

1. 当且仅当 $x<x^*$ 时，$(x,y)<(x^*,y)$；

2. 当且仅当 $y<y^*$ 时，$(x,y)<(x^*,y^*)$，

我们称 $O=\mathrm{ord}(D)$ 为序数 M 与 N 之积，记为

$$O=M\odot N.$$

序数之积的定义实际上就做了一件事情：即对笛卡尔积 $M\times N$ 的元素排序．由于该笛卡尔积的元素都是序偶，因此排序中不得不分别考虑第一坐标和第二坐标．概括地说，对于任意两个这样的序偶，当第二坐标相同时，就把第一坐标较小的排在前面；当第二坐标不同时，就把第二坐标较小的排在前面，而不管第一坐标谁大谁小．我们把序偶之间的这种顺序，称为倒字典顺序．例如，对于 2 和 ω 的笛卡尔积 $2\times\omega$ 的元素按倒字典顺序有如下的排列：

$(0,0),(1,0);(0,1),(1,1);(0,2),(1,2);(0,3),(1,3);\cdots$

不难验证,由此排列的积首先是一个良序集,其序数为 $2\cdot\omega$. 而在自然数集的讨论中我们曾证明过它与 ω 是等势的,并由此排列推之,它与 ω 是相似的,所以有

$$2\odot\omega=\omega.$$

再看 $\omega\times 2$,由定义规定的排列顺序,其元素的排列为:

$(0,0),(1,0),(2,0),(3,0),\cdots;(0,1),(1,1),(2,1),(3,1),\cdots$

按照定义,这个良序集的序数是 $\omega\cdot 2$. 但尽管该良序集还是同 ω 等势,但由其元素排列的方式,它却不能与 ω 相似,所以,序数 $\omega\odot 2\neq 2\odot\omega$.

上述第二例表明,序数之间的乘法运算一般情况下是不满足交换律的. 其实,由于序数的乘积是由笛卡尔积来定义的,因此,具有这一特点应当是不难理解的.

由序数乘法定义出发,对于任意的序数 M,N,O,不难验证下述运算律的成立:

$$M\odot 0=0\odot M=0;$$
$$M\odot 1=1\odot M=M;$$
$$(M\odot N)\odot O=M\odot(N\odot O);$$
$$M\odot(N+O)=M\odot N+M\odot O,$$

即,在序数乘法中,零元律、单元律、结合律和乘法对加法的左分配律都是成立的,但交换律和乘法对加法的右分配律一般情况下都不成立.

由上述序数乘法的定义和运算律,不难推出:

1. $M\odot 0=0$;

2. $M\odot N^{+}=M\odot N+M$,

可见,序数乘法定义是满足自然数乘法的递推定义的,它也应当就是自然数乘法的递推定义中那个唯一存在的运算. 因此,当序数 M,N 就是自然数时,这里定义的乘法就应当完整的还原为自然数

的乘法运算．下面，我们以例的方式，来证明一些重要的性质和关系．

例 1　证明对任意的序数 a，有

$$a+a=a\odot 2.$$

证明：由左分配律

$$\begin{aligned} a+a &= a\odot 1+a\odot 1 \\ &= a\odot(1+1) \\ &= a\odot 2. \end{aligned}$$

例 1 表明，n 个相同元素之和，就等于该元素乘以该元素的个数．

例 2　证明对任意的序数 a,b,c，都有

$$b<c\rightarrow a+b<a+c.$$

证明：由于序数都是良序集，所以，如果设 $b<c$ 成立，那么 b 必定是 c 的真截段，记分别由 a,b,c 的元素为第一坐标的序偶构成的良序集分别为

$$\overleftrightarrow{a}=\{(x,0)\mid x\in a\};$$

$$\overleftrightarrow{b}=\{(y,1)\mid y\in b\};$$

$$\overleftrightarrow{c}=\{(z,1)\mid z\in c\},$$

则 $\overleftrightarrow{b}$ 是 $\overleftrightarrow{c}$ 的真截段，从而 $\overleftrightarrow{a}\cup\overleftrightarrow{b}$ 是 $\overleftrightarrow{a}\cup\overleftrightarrow{c}$ 的真截段，所以，有

$$\operatorname{ord}(\overleftrightarrow{a}\cup\overleftrightarrow{b})<\operatorname{ord}(\overleftrightarrow{a}\cup\overleftrightarrow{c}),$$

由序数加法的定义，此即

$$a+b<a+c.$$

应当注意的是，由于序数加法的交换律不一定成立，所以

$$b<c\rightarrow b+a<c+a$$

不一定成立．

例 3　对序数 $a,b,c,a\neq 0\wedge b<c\rightarrow a\odot b<a\odot c.$

证明：由于序数都是良序集，所以，如果设 $b<c$ 成立，那么 b 必定是 c 的真截段，又因 $a\neq 0$，所以 $a\times b\subsetneqq a\times c$. 下面，我们只需要证明前者是后者的截段（从而是后者的真截段）就可以了.

事实上，对任意的 $(x,y)\in a\times b$ 和任意的 $(x',y')\in a\times c$，若 $(x',y')<(x,y)$，那么，或者由 $y'<y$，则由 $y\in b$，推出 $y'\in b$，从而 $(x',y')\in a\times b$；或者由 $y'=y$ 并且 $x'<x$，则由 $x\in a$，推出 $x'\in a$，从而也有 $(x',y')\in a\times b$. 可见，$a\times b$ 是 $a\times c$ 的真截段，由序数之间的关系，必然有 $\mathrm{ord}(a\times b)<\mathrm{ord}(a\times c)$，由定义，即有 $a\odot b<a\odot c$.

例 3 中的公式与例 2 中的公式类似（由于序数乘法的交换律不成立，所以，当 $a\neq 0\wedge b<c$ 为真时，不一定推得出 $b\odot a<c\odot a$ 为真.

以上三例中的公式，不但对有限序数的顺序、计算等的理解和操作具有实践意义，对较为抽象的超限序数来说，也同样如此. 例如，在第二节的讨论中，我们曾在自然数 $1,2,3,\cdots,n,\cdots$ 后面给出过像 $\omega,\omega+1,\omega+2$ 等这样的超限序数. 现在，我们可把这一工作非常自然的做下去，有

$$1,2,3,\cdots,n,\cdots,\omega,\omega+1,\omega+2,\cdots,$$
$$\omega\odot 2,\omega\odot 2+1,\omega\odot 2+2,\cdots,$$
$$\omega\odot\omega,\omega\odot\omega+1,\omega\odot\omega+2,\cdots,$$
$$\omega\odot\omega\odot\omega,\omega\odot\omega\odot\omega+1,\omega\odot\omega\odot\omega+2,\cdots$$

显然，只要以序数原本的序这样列下去，可以是无限的，不过只要以序数原本的序这样列下去，即变化只是在 ω 同自然数之间进行有限次的加法和乘法，那么得到的序数都一定是可数的.

在可数序数的基础上，我们也可以得到不可数的序数. 例如，对数学中的开区间 $(0,1)$，我们以它为一集合，并按照良序化原理赋予它以良序，那么就可以得到一个良序集，由计数原理，必有唯一的一个序数与之对应，那么，与之对应的这个序数就是不可数

的. 设 a 是一个不可数序数，令$\{b \mid b$ 是不可数序数并且 $b \leqslant a\}$ 为一序数的集合，由第二节所证，这个非空集合必定是良序集，故可设 ω_1 是它的最小元. 这就等于说 ω_1 不可数，而比它小的任何序数都是可数的. 于是，我们在一切可数的序数之后的那个最小的不可数序数 ω_1 之后又可继续地列下去，有

$$\omega_1, \omega_1 + 1, \omega_1 + 2, \cdots, \omega_1 \odot \omega_1, \omega_1 \odot \omega_1 + 1, \cdots$$

其结果，是我们可以得到许多与 ω_1 等势的序数. 而对于 ω_1，存在集合如$\wp(\omega_1)$，使得 ω_1 受制于该集合，从而又存在序数，使 ω_1 严格受制于这个序数. 于是，我们又可设 ω_2 是这些序数中的最小的一个，用上述构造的方法，我们又可以得到一段与 ω_2 等势的序数，以此类推，我们可以得到关于“序数长河”的较为具体的印象.

第七节　基数

从集合的角度来说，基数指的是衡量集合元素多少的标准，正如本章开篇时所说到的自然数的第一个作用一样，在这样的理解下，基数的问题实际上我们早就已经接触到了．例如，说两个集合等势可被看成它们具有“同样多”的元素，这里的“同样多”的衡量标准就是基数；又如，说一个集合受制于另一个集合，实际上是断定前者的元素是“少于”后者的元素的，这里的衡量标准还是基数.

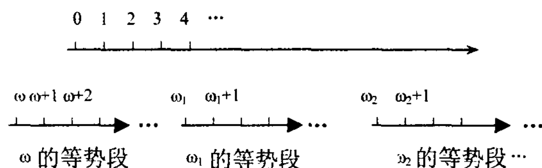
基数作为衡量集合元素多少的标准，有多种不同的说法．例如，有人认为：当且仅当两集合等势时，称它们有相同的势，而势也叫做基数．但在这样的提法中，人们没有进一步说明“势”本身又是什么；另一种提法是：与集合 A 等势的一切集合的共同性质叫做 A 基数．而在这样的提法中，“共同性质”过于含混．在集合理论中，唯一的研究对象就是集合，“共同性质”是一个什么样的集合，显然是难于说清楚的；同第二种提法相关的一种说法是：与 A 等势的一切集合组成的集合 $\{A\}$ 叫做 A 的基数．但在这种说法中，当 A 不是空集时，就可能导致集合悖论．例如，若我们承认这种说法，则与 $A \neq \varnothing$ 等势的一切集合可以构成集合 $\{A\}$，现在集合 A 中任取元素 a，那么对于任意的集合 b，我们如下构造集合

$$B_b = \begin{cases} A & b \in A, \\ (A \sim \{a\}) \cup \{b\} & b \notin A; \end{cases}$$

显然，$B_b \approx A$，所以，$B_b \in \{A\}$．再取 $\{A\}$ 为包容集，由子集公理，所有的集合 B_b 可以构成一个集合，设为 M，由并集公理，当然 $\bigcup(M)$ 就应当是一个集合，于是，我们看到，集合 $\bigcup(M)$ 能够包含任意的集合 b，这显然是不可能的．因此，第三种基数的说法是

不能成立的．下面，我们在序数定义的基础上来定义基数．

在上节的论述中，我们曾依次列出过一系列的序数．其中，ω 是最小的超限序数，ω_1 是最小的不可数序数，ω_2 则是使 ω_1 严格受制的那些不可数序数中的最小的序数等．在序数的长河里，每个有限序数即自然数都只与自己等势；ω 则与在其后且在 ω_1 之前的一切序数等势，而同样的 ω_1 则与在其后且在 ω_2 之前的一切序数等势，以此类推．这样，不妨把依次排列的序数划分成无限多个"等势段"：



在图中，每个自然数自己组成一个等势段；从 ω 开始的序数的等势段如图所示．这样，任何一个无序集 A 一旦按良序化原理良序化以后，由计数原理它就有了一个序数，而这个序数总是要出现在某一个"等势段"中的，这样，A 就与这个段中的每一个序数等势．现在看来，从每个"等势段"中选出一个代表用以作为衡量集合元素多少的标准就是再自然不过的事情了．对于有限序数即自然数，由于它们都只与自己等势，当然无所选；而对超限序数来说，选取与其等势段中最小的那个序数当然也是最为方便不过的事情了．下面，就是我们关于基数的定义：

定义　把序数 a 称为一个基数，当且仅当对于任意的序数 b，都有

$$a \approx b \rightarrow a \leqslant b.$$

按照上述定义，对每个自然数，这是显然的．而超限序数 ω，ω_1，ω_2 等是基数，由定义也不难验证．以后，我们把无穷的基数称为超限基数，例如 ω 就是超限基数．超限基数都是在超限序数的基础上定义的，由于超限序数都是极限序数，因此，我们可以证明：

凡超限基数必定是极限序数．这是因为，假定 a 是超限基数，如果存在序数 b，使得 $a=b^{+}$，那么 b 一定是无穷集．由超限序数集之间的等势，不难构造由 b^{+} 到 b 上的双射，使得 $b^{+}\approx b$. 于是有 $a\approx b$ 并且 $b<a$，这显然是与基数的定义矛盾的．

按照上述基数的定义方式，可以把基数作为序数的特殊情况．由于基数是用以衡量集合元素的多少的标准，因此，我们可以不再考虑它们各自的内部顺序了．然而，另一方面，既然基数是衡量集合元素的多少的标准，我们就必须考虑基数之间的大小顺序．考虑到基数定义的理论来源，我们以序数之间的顺序来规定基数之间的顺序，即对任意的基数 a 和 b，都有：$a<b\leftrightarrow a\in b$ 或者 $a<b\leftrightarrow a\subsetneqq b$. 并且，同序数的情形一样，$a\leqslant b\leftrightarrow a\subseteq b$.

今后，对于自然数，无论是作为基数还是序数，我们都不加区别地采用同样的符号，如 0，1，2，3，…，n 等．对于 ω，为了区别于作为序数的 ω，我们以 $\aleph_0$ 来记作为基数的 ω. 类似地，分别以 $\aleph_1$，$\aleph_2$ 来记作为基数的超限序数 ω_1，ω_2 等．

第八节　无序集的基数

由上述定义来看，基数是用以衡量集合元素多少的标准的．确切地说，对于任一集合，是否就一定存在某个唯一的基数与之等势？下面，我们就来回答这个问题．

一、集合的基数存在原理

在上一节，我们曾一般地证明过，与一个非空集合等势的一切集合不能组成集合，但我们有下面的定理：

定理　与给定集合等势的所有序数构成一个集合．

证明：我们先说明与 A 等势的一切序数 b 都小于某个确定的序数．看 A 的幂集$\wp(A)$，由良序化原理，使得$\wp(A)$良序化肯定是存在的．再由计数原理，设 δ 是$\wp(A)$所对应的序数，则对任一序数 $b \approx \delta$，都有 $b < \delta$. 这是因为，若存在序数 $b_0 \approx A$，并且 $\delta \leqslant b_0$，则由$\wp(A) \approx \delta \subset b_0 \approx A$ 必然可推出$\wp(A) \lhd A$，这就同在集合的受制理论中所证明的、任何集合的幂集都不可能受制于该集合相矛盾．所以，满足上述条件的序数 $b < \delta$，即 $b \in \delta$. 现在就取 δ 作为包容集，那么，由子集公理可知，一切与 A 等势的序数 b 必定能构成一个集合．

集合基数存在定理　对于任意给定的集合 A，存在唯一基数 a，使得 $a \approx A$.

证明：我们用 M 表示上面已证定理中所存在的那个集合，即

$$M = \{b \mid b \text{是序数并且} b \approx A\}.$$

由本章第二节已证，序数构成的集合都是非空的良序集，所以，$M \neq \varnothing$ 且有良序．现在设 a 是 M 的最小元，不难验证，当 A 是有限集时，那么存在唯一自然数 $n \approx A$，此时 $a = n$；当 A 是无限集时，那么与 A 等势的序数构成某个“等势段”，而 a 就是该等势段的第一个即最小元素．

以后，我们把与集合 A 等势的唯一基数 a 称为 A 的基数，记为

$$a = \mathrm{car}(A).$$

$\mathrm{car}(A)$ 就是与 A 等势的所有序数中的最小的一个．由上述证明，当 A 是有限集时，有

$$\mathrm{car}(A) = N(A).$$

二、基数的性质

由基数的定义和基数对集合元素的衡量功能，我们不难得到基数下述的一般性质．

对于给定的自然数 n，

$$N(n) = n,$$

而对于基数 a，我们同样有

$$\mathrm{car}(a) = a.$$

这由上一节所给出的有限基数和超限基数的定义而不难证明.

对于给定的自然数 m, n，我们已证明 $m \approx n \rightarrow m = n$. 对于基数 a, b，我们也同样有

$$a \approx b \rightarrow a = b.$$

这是因为，若 $a \approx b$，则可知 $a = \mathrm{car}(b)$，但有 $\mathrm{car}(b) = b$，所以，必定有 $a = b$.

对于给定的基数 a, b，都有 $a \prec b \leftrightarrow a < b$. 这是因为，若设 $a \prec b$，那么，如果有 $b \leqslant a$，则 $b \subseteq a$. 由受制的定义，就有 $b \lhd a$，这显然

与假设矛盾．而另一方面，若设 $a < b$，则 $a \subsetneqq b$，于是有 $a \lhd B \wedge a \neq b$，这表明，a 受制于 b 但又不等势于 b，所以，$a \prec b$.

定理　$\mathrm{car}(A) = \mathrm{car}(B) \leftrightarrow A \approx B$.

证明：$\mathrm{car}(A) = \mathrm{car}(B) \rightarrow A \approx B$ 是显然的，我们只需证明 $A \approx B \rightarrow \mathrm{car}(A) = \mathrm{car}(B)$.

若假设 $A \approx B$，那么，有 $\mathrm{car}(A) \approx \mathrm{car}(B)$. 由上述已证，就有 $\mathrm{car}(A) = \mathrm{car}(B)$.

本定理证实了我们在上一节开始时所设想的：当且仅当两集合等势时，它们就有相同的基数．作为定理的推论，我们有：

推论　无穷可数集都具有基数 $\aleph_0$.

推论的真实性由无穷可数集的定义和基数 $\aleph_0$ 的定义是显然的．

在集合的等势讨论中，我们把两集合 A 与 B 等势直观地解释为它们拥有“同样多”的元素．现在引入基数的概念后，问题就变得明朗具体化了：即它们的元素“同样多”就是它们具有相同的基数．而在集合受制的讨论中，我们把集合 A 受制于（严格受制于）集合 B 直观地设想为 A 的元素“不多于”（“少于”）集合 B 的元素．那么，以下的命题会告诉我们，A 受制于（严格受制于）集合 B，就是 A 的基数不大于（小于）B 的基数．

定理　对任意的集合 A 与 B，都有

1. $\mathrm{car}(A) < \mathrm{car}(B) \leftrightarrow A \prec B$;
2. $\mathrm{car}(A) \leqslant \mathrm{car}(B) \leftrightarrow A \lhd B$.

证明：1. 因为 $\mathrm{car}(A) \approx A$，$\mathrm{car}(B) \approx B$，所以，$\mathrm{car}(A) \prec \mathrm{car}(B) \leftrightarrow A \prec B$. 但在上述证明中，已证 $\mathrm{car}(A) \prec \mathrm{car}(B) \leftrightarrow \mathrm{car}(A) < \mathrm{car}(B)$，所以，

$$\mathrm{car}(A) < \mathrm{car}(B) \leftrightarrow A \prec B.$$

2. 我们已证，若 a, b 是基数，则有 $a \approx b \rightarrow a = b$；现又证明了

$\text{car}(A) < \text{car}(B) \leftrightarrow A \prec B$，把这两者结合起来，就有

$$\text{car}(A) \leqslant \text{car}(B) \leftrightarrow A \trianglelefteq B.$$

我们把实数区间$(0,1)$叫做连续统，用c记连续统的基数．凡与连续统等势的集合，例如实数集$\mathbf{R}$，$\mathbf{R}$的任何一个非退化区间等都具有基数c．$[0,1)$是这样的一个区间，所以$[0,1)$的基数就是c．由于ω严格受制于$[0,1)$，所以，由上述定理，有

$$\aleph_0 < c.$$

而对于任意集合A，我们证明过$A \prec \wp(A)$，因此，也有

$$\text{car}(A) < \text{car}(\wp(A)).$$

当然，在上述对定理的运用中也再次表明，$\aleph_0$为什么被我们定义为最小的超限基数．

在讨论集合等势和受制时，我们曾从函数的角度证明过Schröder－Bernstein定理，当时的证明过程不能不说是较复杂的．下面，作为上述连续证明的两个定理的应用，我们再来证明这个定理．设$A \trianglelefteq B$并且$B \trianglelefteq A$，则有$\text{car}(A) \leqslant \text{car}(B)$，并且$\text{car}(B) \leqslant \text{car}(A)$，由上述证明，就有$\text{car}(A) = \text{car}(B)$，所以，$A \approx B$．

应该指出的是，我们紧接着上述几个定理来证明Schröder－Bernstein定理，是希望读者明白，这里的证明同我们在讨论集合等势和受制时的证明的出发点是不同的．在这里的证明，我们依赖的是以选择公理推出良序化原理，以替换公理推出计数原理，从而确定每个集合都有唯一的基数，并由此得到一系列结论；而在最早的证明中是没有依赖这两条公理的，因此可以说，Schr?der－Bernstein定理是独立于选择公理和替换公理的．

最后，我们给出基数相应于序数的两个性质：

定理　对于任意的由基数组成的集合A，存在基数d，使得d为A的上界．

证明：由基数的定义和任意序数构成的集合都有上界，必定存

在序数 j，使得 j 是 A 的上界．这表明，对于每个基数 $a \in A$，$a \leqslant j$，也就是 $a \subseteq j$．于是由以上所证，$a \leqslant \mathrm{car}(j)$．所以，我们不妨就取 $d = \mathrm{car}(j)$，定理成立．

定理　不存在一切基数的集合．

证明：我们使用反证法：若 A 就是由所有的基数构成的集合，由上证，A 有上界，设为 j．现在我们又设 $p = \mathrm{car}(\wp(j))$，那么，j p．于是，基数 p 就大于 A 中的任一基数，必然有 $p \notin A$，这当然与假设是矛盾的，故不存在一切基数的集合．

第九节　基数的和、积、幂

基数是序数的特殊情况，在序数的长河里，由定义能够成为基数的序数被分为两类：一类是自然数如 $0,1,2,\cdots,n,n^+$ 等；而另一类则是所谓的每一个"等势段"中的那个最小元，如 ω,ω_1,ω_2 等．那些由第一类的序数即自然数定义的基数，是有限基数；而那些由第二类序数定义的基数，是超限基数．超限基数同有限基数的一个根本的差别在于：有限基数变大的节奏同自然数变大的节奏是同步的；但超限基数变大的节奏却是跳跃的．例如，从最小的超限基数 $\aleph_0=\omega$ 到下一个最小不可数的超限基数 $\aleph_1=\omega_1$，之间越过了 $\omega+1,\omega+2,\cdots,\omega\odot 2,\omega\odot 3\cdots,\omega\odot\omega,\cdots,\omega\odot\omega\odot\omega,\cdots$，其间有多到不可数的序数．要想达到再下一个基数，需越过更多、多到不可数的序数．在第七节，我们规定基数之间沿袭序数之间的顺序，是因为考虑到，无论超限基数跨越的等势段中有多少序数，从规定的顺序上看，在前的总是在前，而在后的也总是在后．同时，在这样的规定下，我们可以推出基数之间的"$\prec$"关系，恰好就相当于集合之间的关系，而这正是我们在理论构建中所希望的．

由于基数和序数的以上区别，所以不能简单地沿用序数的加法和乘法的定义了．因为再沿用这样的定义，求得两基数的和或积肯定是序数，但却不一定再是基数．例如，$\aleph_0=\omega$ 与 1 都是基数，但按序数加法的定义，$\omega+1=\omega^+$ 就不再是基数了．基数的概念实际上借助了等势的概念，因此，下面我们就以等势为线索来定义基数的加法和乘法．

一、基数的加法

定理　若 $A_1 \approx A_2, B_1 \approx B_2$，且 $A_1 \cap B_1 = A_2 \cap B_2 = \varnothing$，则 $A_1 \cup B_1 \approx A_2 \cup B_2$.

证明：我们只需能找到一个从 $A_1 \cup B_1$ 到 $A_2 \cup B_2$ 上的双射就可以了．事实上，由 $A_1 \approx A_2, B_1 \approx B_2$，则存在 f 是从 A_1 到 A_2 上的双射，g 是从 B_1 到 B_2 上的双射，那么，$f \cup g$ 就是我们所需要的双射．

定义　设 a,b 是基数，并且集合 A,B 满足条件：

$$\mathrm{car}(A) = a; \mathrm{car}(B) = b; A \cap B = \varnothing,$$

则称 $c = \mathrm{car}(A \cup B)$ 为 a 与 b 的和，记为

$$c = a + b.$$

由上面所证定理可知，定义中的基数 a,b 是不依赖于集合 A，B 的选取的，因此 $a+b$ 同样不会依赖于 A 和 B. 事实上，对于任何基数 a 和 b，满足定义条件的集合总是会存在的．例如，对于给定的任意基数 a 和 b，我们至少可取

$$A = \{(x,0) \mid x \in a\},$$

$$B = \{(y,1) \mid y \in b\}$$

这样的集合来作为所需的集合．应当注意的是，在定义给定的条件下，总有

$$\mathrm{car}(A \cup B) = \mathrm{car}(A) + \mathrm{car}(B).$$

基数的加法同序数的加法是有区别的，尽管我们是用同一个符号"+"来表示的．如，按照序数的加法，有

$$\omega + 1 = \omega^+,$$

但按照基数的加法，则只能有

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0.$$

基数的加法有下述的运算律：

1. $a+0=a$.

在基数加法的定义中，只需令 $b=0$，集合 $B=\varnothing$ 就可以了.

2. $(a+b)+c=a+(b+c)$.

因为，对于满足基数加法定义的任意集合 A,B,C，由集合的并运算律都有：

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),$$

所以有

$$\mathrm{car}((A\cup B)\cup C)=\mathrm{car}(A\cup(B\cup C)),$$

由基数加法定义，即

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

3. $a+b=b+a$.

因为，由集合并的交换律，有 $\mathrm{car}(A\cup B)=\mathrm{car}(B\cup A)$，再由基数加法的定义，就有

$$a+b=b+a.$$

自然数都是基数．自然数原来加法的递推定义，也应当包含在基数加法的定义之中，我们可以证明，现在定义的基数加法是满足原来自然数加法的递推定义的．这是因为，对于自然数加法递推定义中的两个条件：1. $m+0=m$；2. $m+n^{+}=(m+n)^{+}$，1 显然是基数加法运算律 1 的特殊情况．而对于 2，我们先证明在基数加法中，对任意自然数 n，都有 $n^{+}=n+1$．事实上，$n^{+}=n\cup\{n\}$，而按照基数加法定义，$n+1=\mathrm{car}(n\cup B)$，其中，与 n 不相交的集合 B 可取为 $\{1\}$，显然，有 $B=\{1\}\approx 1=\{0\}$．由此不难得到 $n^{+}\approx n\cup B$，由基数加法定义，即有 $n^{+}=n+1$．再应用上述基数加法运算律 2，易证 $m+n^{+}=(m+n)^{+}$ 也成立．因此，对于特殊的基数即自然数来说，基数加法是完全满足原来自然数加法的递推定义的．

基数在进行加法运算时，有下述的基本性质：

1. 若 a,b,c 是任意的基数，则

$$a\leqslant b\rightarrow a+c\leqslant b+c.$$

我们只需令集合 A,B,C 分别为 $A=\{(x,0)\mid x\in a\}$，$B=\{(y,0)\mid y\in b\}$，$C=\{(z,1)\mid z\in c\}$，则显然有 $A\approx a$，$B\approx b$，$C\approx c$，并且，$A\cap C=B\cap C=\varnothing$. 那么，按题意，如果 $a\leqslant b$，即 $a\subseteq b$，则按上述所令，有 $A\subseteq B$，所以 $A\cup C\subseteq B\cup C$，由基数加法定义，即 $a+c\leqslant b+c$. 应当注意的是，由于这里的加法运算是以基数为对象的，所以在性质 1 中，即使去掉题设中含有的等于关系，也不能因此去掉结论中含有的相等关系．这是因为在基数中毕竟存在大量的超限基数，它们所参与的加法同非超限基数之间的加法是有区别的．

2. $\aleph_0+\aleph_0=\aleph$.

我们记集合 $A=\{(n,0)\mid n\in\omega\}$，$B=\{(n,1)\mid n\in\omega\}$，则 $A\approx B\approx\omega$，并且 $A\cap B=\varnothing$. 设

$$f(x)=\begin{cases}2\odot n & x=(n,0)\text{ 时；}\\ 2\odot(n+1) & x=(n,1)\text{ 时，}\end{cases}$$

则 $f:A\cup B\to\omega$ 必定是双射，由基数加法定义，$\aleph_0+\aleph_0\doteq\aleph_0$ 成立．

3. 设 n 是任一自然数，则

$$\aleph_0+n=\aleph_0.$$

在基数的顺序中，对于任意自然数 n 来说，都有 $n<\aleph_0$，故由上述性质1和性质2及运算律3，必然有 $\aleph_0+n\leqslant\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$；但 $n\geqslant 0$，故又可推出 $\aleph_0+n\geqslant\aleph_0$. 于是只能有上述的结论成立．

我们知道，$\aleph_0$ 是最小的超限基数，而超限基数在"跨越性"上具有类似的属性．因此，作为性质 1 和性质 3 的推广，我们有：设 n 是任意自然数，而 a 是任一超限基数，则

$$a+a=a;$$

$$a+n=a.$$

前者的证明需引用 Zorn 引理，后者的证明类似于 3，都留给读

者作为练习.

定理 设 a 是任意超限基数,基数 $b \leqslant a$,则有

$$a + b = a.$$

本定理又称为是基数加法的吸收律.吸收律反映的是,当一个超限基数同任何一个不超过它的基数相加时,加上的基数就会被原来的超限基数所吸收,使得相加的结果仍是原来的超限基数.吸收律显然是对上述性质 1 和性质 3 的进一步概括.

证明:由上述性质,$a + b \geqslant a$;并且 $a + b \leqslant a + a = a$. 综合两者,故有 $a + b = a$.

以上讨论的都是两个基数的加法运算,下面,我们用定义来把上述讨论引向多个基数的和的情况.

定义 给定由基数组成的族 $(a_i)_{i\in I}$(其中标集 I 可以是任意的集合). 令族 $(A_i)_{i\in I}$ 的项两两不相交,并对每个 $i \in I$,都有 $\mathrm{car}(A_i) = a_i$. 则称 $c = \mathrm{car}(\bigcup\limits_{i\in I} A_i)$ 为诸 a_i 的和,记为

$$c = \sum_{i\in I} a_i.$$

同任意两基数的和定义一样,用相同的构造方法足以说明定义中的 c 是不依赖于集族 $(A_i)_{i\in I}$ 的. 当 $I = 2$ 时,我们有

$$\sum_{i\in 2} a_i = a_0 + a_1,$$

这就是我们前面所说的两个基数的和. 类似地,当 $I = 3$ 时,有

$$\sum_{i\in 3} a_i = a_0 + a_1 + a_2$$

等. 当标集元素无穷时,如以实数集 $\mathbf{R} = I$,那么,若每个 $a_i = 1$,则此时有

$$\sum_{i\in \mathbf{R}} a_i = \sum_{i\in \mathbf{R}} 1 = \mathrm{car}(\mathbf{R}) = c.$$

在基数的和的定义中,由于集族的并是满足交换律和结合律的,因此,同两个基数的和的定义一样,基数的加法运算都是满足交换律和结合律的.

二、基数的乘法运算

在讨论集合的等势时，我们曾证明过，对于任意的集合 A,B 和 C,D，如果 $A\approx C$ 并且 $B\approx D$，那么，$A\times B\approx C\times D$. 下面，我们就以此为基础来定义基数的乘法运算．

定义　设 a,b 都是基数，并且集合 A,B 满足条件

$$\mathrm{car}(A)=a,\mathrm{car}(B)=b,$$

则称 $c=\mathrm{car}(A\times B)$ 为 a 与 b 的积，记为

$$c=a\odot b.$$

由于定义中的积 $a\odot b$ 是不依赖于集合 A,B 的选取的，所以，特别地可有 $A=a,B=b$. 按照定义，显然有

$$\mathrm{car}(A\times B)=\mathrm{car}(A)\odot\mathrm{car}(B).$$

和基数的加法一样，虽然基数的乘法同序数的乘法使用的是相同的算子"$\odot$"，但两种运算事实上是有区别的．例如，在序数的乘法中，$2\odot\omega\neq\omega\odot 2\neq\omega$；但在基数的乘法中却有 $\aleph_0\odot 2=2\odot\aleph_0=\aleph_0$.

基数的乘法和加法的关系，同人们在小学算术中得到的认识是一致的．如 $3\odot 2=3+3$；而 $2\odot 3=2+2+2$ 等．一般的，例如设 a,u 都是基数，那么，u 个基数 a 的和 $\sum\limits_{i\in u}a$ 按定义有

$$\sum_{i\in u}a=\mathrm{car}(\bigcup_{i\in u}\overleftrightarrow{a}_i),$$

其中，对于每个 i，$\overleftrightarrow{a}_i=\{(x,i)\mid x\in a\}$，所以

$$\bigcup_{i\in u}\overleftrightarrow{a}_i=\{(x,i)\mid x\in a\wedge i\in u\}=a\times u,$$

现在，两端取基数，就有

$$\sum_{i\in u}a=a\odot u.$$

上述一般关系用通俗的话来说就是“u 个 a 的和就等于 a 乘以 u 的积”. 我们可以把它更一般地推广为，对于任意的标集 u，

$$\sum_{i\in u} a = a \odot \mathrm{car}(u).$$

不难验证，基数的乘法满足以下的运算律：

1. $a \odot 0 = 0$；
2. $a \odot 1 = a$；
3. $(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$；
4. $a \odot b = b \odot a$；
5. $a \odot (b + c) = a \odot b + a \odot c$.

从定义出发，上述等式都不难证明，留给读者作为练习. 下面，我们对等式 5 即基数乘法分配律作一般地推广，即

$$a \odot \sum_{i\in u} b_i = \sum_{i\in u} (a \odot b_i).$$

事实上，取 $(B_i)_{i\in u}$，使得对于每个 $i \in u$，都有 $\mathrm{car}(B_i) = b_i$，并且对任意的 $i, j \in u$，若 $i \neq j$，则 $B_i \cap B_j = \varnothing$. 那么，按定义，有

$$a \odot \sum_{i\in u} b_i = \mathrm{car}(a \times \bigcup_{i\in u} B_i)$$

不难验证

$$a \times \bigcup_{i\in u} b_i = \bigcup_{i\in u} (a \times B_i),$$

现在两边取基数，就有

$$a \odot \sum_{i\in u} b_i = \sum_{i\in u} (a \odot b_i).$$

在基数乘法中，涉及有超限基数时有以下的性质：

1. $\aleph_0 \odot \aleph_0 = \aleph_0$.

这是因为，$\omega \times \omega = \omega$. 我们把这个性质推广到一般的超限基数当中去. 设 a 是超限基数，那么，

$$a \odot a = a.$$

其证明可参考超限基数的和的证明.

2. 设 a,b,c 是任意基数，则

$$a \leqslant b \rightarrow a \odot c \leqslant b \odot c.$$

本证明类似于基数加法的基本性质 1. 同样需要指出的是，在不等式中，即使 $c \neq 0$，或者在 $a \leqslant b$ 中去掉等号，但在 $a \odot c \leqslant b \odot c$ 中的等号也不一定能够去掉. 例如，当 $1 < 2$ 时，有 $1 \odot \aleph_0 = \aleph_0 = 2 \odot \aleph_0$.

3. 设 a 是超限基数，并且有 $1 \leqslant b \leqslant a$，则

$$a \odot b = a.$$

我们把性质 3 称为吸收律，其意为，不大于超限基数 a 的任意非 0 基数与 a 相乘时，都会被超限基数 a 所吸收，因此其积就只能是 a. 我们只需要把上面的性质 1 和性质 2 结合起来就可以了.

吸收律还可以表述为：若基数 a,b 都非 0 并且至少有一个超限时，那么，$a \odot b$ 之积就等于其中最大的那一个. 这个结论同在讨论集合的受制和等势时所得到的结论"任一无穷集 A 与任何受制于它的非空集合 B 的笛卡尔积 $A \times B$ 和 $B \times A$ 都是等势的"是一致的.

下面，我们把以上的两个基数的乘积理论推广到任意多个有限的基数之积的情况上去.

定义 设给定基数族 $(a_i)_{i \in I}$，并且对每个 $i \in I, A_i \approx a_i$. 称 $c = \operatorname{car}(\underset{i \in I}{\times} A_i)$ 为诸 a_i 的积，记为

$$c = \prod_{i \in I} a_i.$$

和两个基数的积一样，其中的 $\prod\limits_{i \in I} a_i$ 不会依赖于族 $(A_i)_{i \in I}$ 的选取. 由笛卡尔积的性质出发，可以证明和两个基数的积一样，有限 $n(\geqslant 3)$ 个基数的乘法运算依然是满足交换律和结合律的.

基数的运算在讨论集合的许多问题时，常常可以因为能够把集合之间的问题转化为基数之间的"="或者"$\leqslant$"的问题，从而使问题得到简单的解决，因此是集合理论分析中的一种重要的工具.

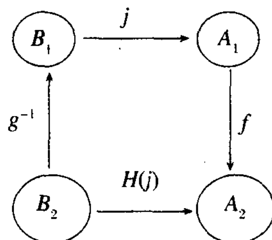
三、基数的幂

在函数集的讨论中，我们曾经给出过证明，对于给定的集合 X 和 Y，从 X 到 Y 内的一切映射形成一个集合，记为 Y^X. 对于集合 Y^X，我们先证明以下的几个性质.

性质定理 1　对给定集合 A_1, A_2, B_1, B_2，若 $A_1 \approx A_2, B_1 \approx B_2$，则

$$A_1^{B_1} \approx A_2^{B_2}.$$

证明：我们只需要构造一个从映射的集合 $A_1^{B_1}$ 到另一个映射的集合 $A_2^{B_2}$ 上的双射就可以了. 由已知条件 $A_1 \approx A_2, B_1 \approx B_2$，我们可设 f 是从 A_1 到 A_2 上的双射，g 则是 B_1 到 B_2 上的双射. 现在我们定义 $H: A_1^{B_1} \to A_2^{B_2}$ 如下：对于从 B_1 到 A_1 内的任意映射 j，令 $H(j) = f \cdot j \cdot g^{-1}$. 由已知和映射的复合，定义等式右边的对应关系如下图：



我们借助上图的直观和已知条件，首先证明 H 必定是单射. 这是因为，假设 j 和 k 都是从 B_1 到 A_1 内的不同映射，即若 $j \neq k$，则存在某个 $x \in B_1$，使得 $j(x) \neq k(x)$. 于是就有

$$H(j)(g(x)) = (f \cdot j \cdot g^{-1})(g(x)) = f \cdot j(x) = f(j(x));$$

$$H(k)(g(x)) = (f \cdot k \cdot g^{-1})(g(x)) = f \cdot k(x) = f(k(x)),$$

由于 f 是单射，所以必定有 $f(j(x)) \neq f(k(x))$，这表明映射

$H(j)$ 与 $H(k)$ 在 $g(x) \in B_2$ 时的值是不相同的，因此 $H(j) \neq H(k)$，由 j,k 的任意性，可见 H 只能是单射．

其次我们证明 H 一定是从 $A_1^{B_1}$ 到 $A_2^{B_2}$ 上的满射．事实上，记从 B_2 到 A_2 上的任一映射为 k，构造映射 $j = f^{-1} \cdot k \cdot g$，从上面的图示中不难看出，$j$ 必定是从 B_1 到 A_1 内的映射．于是我们有，

$$H(j) = f \cdot (f^{-1} \cdot k \cdot g) \cdot g^{-1} = k,$$

由 $k \in A_2^{B_2}$ 的任意性，可见 H 必然是由 $A_1^{B_1}$ 到 $A_2^{B_2}$ 上的满射．综上所证，性质定理 1 成立．

性质定理 2　对任意集合 A,B,C，若 $B \cap C = \varnothing$，则

$$A^{B\cup C} \approx A^B \times A^C.$$

证明：设 f 是从 $B \cup C$ 到 A 内的任一映射，g,h 分别是 B 到 A 内、C 到 A 内的任意映射，那么，显然有 $(g,h) \in A^B \times A^C$. 现在如下定义 $H: A^{B\cup C} \to A^B \times A^C$，令

$$H(f) = (f \mid B, f \mid C),$$

那么，显然对任一映射 f 来说，H 都只能是单叶的．另外，对于任意的 $(g,h) \in A^B \times A^C$ 来说，因为 $\mathrm{dom}(g) = B$，$\mathrm{dom}(h) = C$，并且 $B \cap C = \varnothing$，故使得对任一 $f \in A^{B\cup C}$，必定都有 $H(f) = (g,h)$，可见，H 也必定是从 $A^{B\cup C}$ 到 $A^B \times A^C$ 上的满射，故性质定理 2 成立．

性质定理 3　对任意的集合 A,B,C，都有

$$(A \times B)^C \approx A^C \times B^C.$$

证明：令 f 是从 C 到 $A \times B$ 的任一映射．定义 $H: (A \times B)^C \to A^C \times B^C$ 如下：对于任意 $f \in (A \times B)^C$，都有

$$H(f) = (f(A), f(B)),$$

不难验证，H 必定是从 $(A \times B)^C$ 到 $A^C \times B^C$ 的单射和满射，故性质定理 3 成立．

性质定理 4　对任意的集合 A,B,C，都有

$$(A^B)^C \approx A^{B\times C}.$$

证明：令 f 是从 C 到 A^B 内的任一映射，即对于任一 $u \in C$，都有 $f(u)$ 是从 B 到 A 内的映射．定义 $H:(A^B)^C \to A^{B\times C}$ 如下：对于任意 $f \in (A^B)^C$，都有

$$H(f)(v,u) = f(u)(v).$$

上面等式的含义是，$H(f)$ 在 (v,u) 的值，就等于映射 $f(u)$ 在 v 的值．在此定义下，H 首先必然是单射．这是因为，假设 f,g 都是从 C 到 A^B 内的任意映射，并且 $f \neq g$，那么，存在 $u \in C$，使得 $f(u) \neq g(u)$，当然也就存在 $v \in B$，使得 $f(u)(v) \neq g(u)(v)$．于是有

$$H(f)(v,u) = f(u)(v) \neq g(u)(v) = H(g)(v,u),$$

此即

$$H(f) \neq H(g).$$

因此，H 是单叶的；其次，如上定义的 H 必定是从 $(A^B)^C$ 到 $A^{B\times C}$ 上的满射．这是因为，对于任意的 $k \in A^{B\times C}$，不妨取 $f \in (A^B)^C$ 如下：对于任意的 $u \in c$ 和任意的 $v \in B$，取 $f(u)(v) = k(v,u)$．那么，对于任意的 $(v,u) \in B \times C$，必定都有

$$H(f)(v,u) = f(u)(v) = k(v,u),$$

所以，就有 $H(f) = k$，因此 H 必定是满射．综上所述，性质定理 4 成立．

定义　设 α,β 是基数，且集合 A,B 满足条件

$$\operatorname{car}(A) = \alpha, \operatorname{car}(B) = \beta,$$

称基数 $\rho = \operatorname{car}(A^B)$ 为 α 的 β 次幂，记为

$$\rho = \alpha^\beta.$$

在基数幂的讨论中，为了把定义中的 α 的 β 次幂即 α^β 同集合 b 到集合 a 内的所有映射即 a^b 加以区别，在以下的论述中，我们特别地用希腊字母 $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ 和大写的希伯来字母 $\aleph,\aleph_0$ 等来记基数，$\alpha^\beta,\alpha^\gamma,\alpha^\varepsilon$ 等来记基数的幂，这样的规定，使得以下讨论的内容不至于同前面讨论的集合相关内容发生记法上的冲突．

由性质定理 1 可知，定义中的 α^β 对相应于 α 和 β 的集合来说，

是具有一般性而不至于必定要依赖于集合A,B的选取的. 因为按照定义,我们有

$$(\mathrm{car}(A))^{\mathrm{car}(B)} = \mathrm{car}(A^B).$$

基数的幂运算与自然数的乘方运算有何关系?对于自然数来说,幂运算就是求相同乘项的积,例如,$5^4 = 5\times5\times5\times5$. 对于有限的基数来说,情况也是一样的. 例如,设α,β是有限的基数,其积

$$\prod_{i\in\beta}\alpha = \mathrm{car}(\underset{i\in\beta}{\times}\alpha)$$

其中,$\prod\limits_{i\in\beta}\alpha$ 即$\prod\limits_{i\in\beta}a_i$,而特别地有 $\alpha_i = \alpha$. 由于 $\underset{i\in\beta}{\times}\alpha = \{(x_i)_{i\in\beta} \mid x_i \in \alpha\}$ 恰好是集合β到集合α内的一切映射(族)$(x_i)_{i\in\beta}$的集合,因此按照定义,它的基数就是α^β,于是我们得到

$$\prod_{i\in\beta}\alpha = \alpha^\beta,$$

它表明,β个α的连乘之积就等于α^β.

基数的幂运算有下述的指数法则:

1. $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta\odot\alpha^\gamma$.
2. $(\alpha\odot\beta)^\gamma = \alpha^\gamma\odot\beta^\gamma$.
3. $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\odot\gamma}$.
4. $\alpha^0 = 1$.
5. 当$\alpha\neq0$时,有$0^\alpha = 0$.

这些运算律同自然数幂的运算律没有什么不相同,由基数幂的定义和定义前的性质定理证明,这些运算律都是不难证明的,留给读者作为练习.

性质定理 5　对任意的基数α,β,γ,都有

1. $\alpha\leqslant\beta\to\alpha^\gamma\leqslant\beta^\gamma$.
2. $\alpha\leqslant\beta\to\gamma^\alpha\leqslant\gamma^\beta$.

证明:由题设,令$\mathrm{car}(A) = \alpha$,$\mathrm{car}(B) = \beta$,$\mathrm{car}(C) = \gamma$,并且$A\lhd B$. 显然,由$A\lhd B$,可假定$A\subseteq B$,那么,由此假定不难验证A^C

$\subseteq B^C, C^A \subseteq C^B$ 都成立，再由基数幂的定义，1 式和 2 式都成立．

例如，由于任一集合 A 的幂集$\wp(A)$ 都是同 A 上的一切特征函数集等势的，因此有$\wp(A) \lhd 2^A$ 并且 $2^A \lhd \wp(A)$，即$\wp(A) \leqslant 2^A$ 并且 $2^A \leqslant \wp(A)$，于是由上述性质不难推出：若令 $\mathrm{car}(A) = \alpha$，则 $\mathrm{car}(\wp(A)) = \mathrm{car}(2^A) = 2^\alpha$．当 A 是有限集时，若 $N(A) = n$，那么，$N(\wp(A)) = 2^n$．又如，我们已知$(0,1) \approx 2^\omega$，若令$(0,1)$ 的基数为 c，那么，由上述性质就有 $c = b^b = 2^b b^b = 2^b$.

性质 5 公式中后件中的等于关系也随前件中的等于关系的消失而消失．如我们知道 $A < 2^A$，令 $\mathrm{car}(A) = \alpha$，那么用基数表示就有 $\alpha < 2^\alpha$．特别地有，$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} = c$.

性质定理 6　设 b 是超限基数，则有 $b^b = 2^b$.

证明：由于 b 是超限基数，所以一方面有 $2 \leqslant b$，故 $2^b \leqslant b^b$；而另一方面，$b \leqslant 2^b$，故，$b^b \leqslant (2^b)^b = 2^{b \odot b}$．但由超限基数的乘法吸收律，有 $b \odot b = b$，所以 $b^b \leqslant (2^b)^b = 2^{b \odot b} = 2^b$，综上所述，就有 $b^b = 2^b$.

性质 6 虽然在无限集基数的计算上并无操作性可言，但在理论上的确定性却是有意义的．例如，设 $\mathbf{R}$ 为实数集，那么，从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 内的函数到底有多少？即 $\mathrm{car}(\mathbf{R}^\mathbf{R}) = ?$，以超限基数 c 记 $\mathrm{car}(\mathbf{R})$，于是由性质定理 6，有

$$\mathrm{car}(\mathbf{R}^\mathbf{R}) = c^c = 2^c, \text{其中}.\ c = 2^{\aleph_0}.$$

定理　设 b 是超限基数并且基数 a 满足 $2 \leqslant a \leqslant b$，那么，有

$$a^b = 2^b.$$

证明：由于 $2 \leqslant a$ 并且 $a \leqslant b$，b 是超限基数，所以由性质 5 和性质 6，有

$$2^b \leqslant a^b \text{ 且 } a^b \leqslant b^b = 2^b,$$

所以，$b^b = 2^b$．我们称上述定理为降底定理．例如，${\aleph_0}^{\aleph_0} = 5^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$，$c^c = \aleph_0^c = 2^c$ 等（其中，c 是超限基数）.

思考与练习

1. 给定序数 α,β. 证明:$\alpha < \beta \to \alpha^+ \leqslant \beta$.

2. 给定序数 α. 证明:在 α 与其后继 α^+ 之间不存在其他的序数.

3. 证明: $\bigcup(A)$ 是由序数构成的集合 A 的上确界.

4. 证明:若 A 是由序数构成的非空集,那么,$\bigcap(A)$ 是 A 的最小数.

5. 证明:对序数 α,都有

(1)$\alpha \notin \alpha$;

(2)$\alpha = \bigcup(\alpha^+)$;

(3)$\alpha = 0$ 或者 α 是极限序数 $\leftrightarrow \alpha = \bigcup(\alpha)$.

6. 证明:对于任意的序数 α,β 都有

(1)$\alpha^+ = \beta^+ \to \alpha = \beta$;

(2)$\alpha < \beta \leftrightarrow \alpha^+ < \beta^+$;

(3)$\beta < \alpha \to \beta \leqslant \bigcup(\alpha)$;

(4) 若 α 相似于 β 的某个子集,那么,$\alpha \leqslant \beta$.

7. 证明: 给定良序集 B, 并设 $A \subseteq B$, 那么,$\mathrm{ord}(A) \leqslant \mathrm{ord}(B)$.

8. 给定序数 α,β. 证明:$\alpha < \beta \leftrightarrow \exists \delta \neq 0(\beta = \alpha + \delta)$. 并举例说明由 $\alpha < \beta$ 不能一般地推出存在 $\delta \neq 0$ 使得 $\beta = \delta + \alpha$.

9. 证明:$\alpha + \beta = \alpha + \gamma \to \beta = \gamma$. 若我们把该等式称为序数加法的左消去律,那么,举例说明序数加法的右消去律不成立.

10. 给定任意的序数 α,β 和自然数 n,证明:$\alpha < \beta \to \alpha + n < \beta + n$.

11. 证明序数乘法的左消去律:$\alpha \neq 0 \wedge \alpha \odot \beta = \alpha \odot \gamma \to \beta = \gamma$ 成立,但右消去律一般不成立.

12. 证明:若序数 $\alpha \neq 0$ 并且 α 不是极限序数,则对任意序数 β 和 γ,都有 $\beta \odot \alpha = \gamma \odot \alpha \to \beta = \gamma$.

13. 给定基数 a,b,c,证明:$a \leqslant b \to a \odot c \leqslant b \odot c$.

14. 证明:任一超限基数都不能被表示为两个小于它的基数的乘积.

15. 证明:给定超限基数 a 和非零自然数 n,则:$a^n = a$.

参考书目

《数理逻辑引论》 王宪均.北京大学出版社,1981年版

《朴素集合论》 刘壮虎.北京大学出版社,2001年第1版

《基础集合论》 董延闿.北京大学出版社,1988年第1版

《集合论与连续统假设浅说》 张锦文.上海教育出版社,1980年版

《Introduction to Axiomatic Set Theory》 G. Aisi Takeuti Wilson, M. Zaring 1971, 1982 by Springer—Verlag New York Inc

《Elements of Set Theory》 P. W. Zehna, R. L. Johnson Allyn and Bacon, Inc. 1962

[General Information]
书名=公理集合引论
作者=涂德辉主编
页数=294
SS号=11818742
DX号=
出版日期=2007.2
出版社=西南师范大学出版社

封面
书名
版权
前言
目录
第一章　绪论
第二章　集合
第一节　集合的概述
第二节　集合论的公式与集合的条件
第三章　集合的基本运算
第一节　子集
第二节　偶集
第三节　集合的并运算
第四节　集合的交运算
第五节　集合的差运算
第六节　集合的幂运算
第四章　关系集与函数集
第一节　序偶
第二节　笛卡尔积
第三节　关系集
第四节　等价关系集
第五节　关系集的逆集与复合集
第六节　函数集
第七节　象和原象
第八节　反函数集和复合函数集
第九节　族
第五章　集合的数学模型——自然数集
第一节　引言
第二节　自然数集
第三节　皮亚诺公理体系

第四节　自然数的顺序
第五节　最小数原理
第六节　递推原理
第七节　自然数的和、积、幂
第八节　第二归纳原理
第六章　集合的等势与受制
第一节　集合的等势
第二节　有限集
第三节　集合的受制
第四节　选择公理
第五节　可数集与一般无穷集
第七章　序集
第一节　序集
第二节　良序集
第三节　超限归纳原理
第四节　序集的相似和良序集的比较
第五节　良序化原理
第六节　Zorn引理
第八章　基数与序数
第一节　序数
第二节　序数之间的顺序
第三节　替换公理
第四节　计数原理
第五节　选择公理的另一个等价命题
第六节　序数的和与积
第七节　基数
第八节　无序集的基数
第九节　基数的和、积、幂
参考书目